

Modellierung von beheizten laminaren und turbulenten Strömungen in Kanälen beliebigen Querschnitts

Von der Gemeinsamen Fakultät für Maschinenbau und Elektrotechnik
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

zur Erlangung der Würde eines

Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

von: Bodo Specht

aus: Jever

eingereicht am: 09.05.2000

mündliche Prüfung am: 29.08.2000

Berichterstatter: Prof. Dr. techn. R. Leithner
Prof. Dr.-Ing. habil. E. F. Hicken
Prof. Dr. M. Perić

2000

An dieser Stelle möchte ich meinen Dank all denen aussprechen, die durch fachliche Gespräche oder durch die Schaffung einer angenehmen Atmosphäre während der Zeit meiner Tätigkeit an der Technischen Universität Braunschweig zum Gelingen der umfangreichen Arbeit beigetragen haben.

Besonders danke ich den Mitgliedern der Promotionskommission, die es ermöglicht haben, das Verfahren trotz schwieriger juristischer Umstände erfolgreich zu beenden. Herrn Professor Dr. G. Kosyna danke ich für die Übernahme des Kommissionsvorsitzes und für die interessante Prüfung in seinem Fachgebiet der Strömungsmaschinen, die ich im Rahmen des Dissertationsverfahrens bei ihm ablegen durfte. Herrn Professor Dr. R. Leithner danke ich für die freundliche Aufnahme an seinem Institut nach der Aufteilung des Instituts für Raumflug- und Reaktortechnik sowie für die Übernahme des ersten Referats. Für die intensiven Gespräche, einen permanenten Antrieb und uneingeschränkte Unterstützung sowie die Übernahme eines weiteren Referats danke ich Herrn Professor Dr. E. F. Hicken, der mir auch mit seiner Vorlesung zum Thema Sicherheit und Risiko großtechnischer Systeme, die ich betreuen durfte, neue und sehr interessante Aspekte des Maschinenbaus vermittelt hat. Vor allem im Bereich der Numerik waren Gespräche mit Herrn Professor Dr. M. Perić eine große Hilfe und Bestätigung für mich. Dafür und für die Übernahme eines weiteren Referats bedanke ich mich besonders.

Allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern der Institute, an denen ich gearbeitet habe, danke ich für ihren Beitrag an einem für mich sehr angenehmen Arbeitsklima. Auch den vielen Studenten, die an den von mir durchgeführten Übungen, Exkursionen und Fachlaboren sowie an von mir betreuten Vorlesungen teilgenommen oder Seminarvorträge, Studien- und Diplomarbeiten unter meiner Betreuung angefertigt haben, danke ich für Ihre engagierte Mitarbeit. Besonderer Dank gilt den Studenten, die mit Studien- und Diplomarbeiten am Gegenstand der Dissertation mitgewirkt haben (in chronologischer Reihenfolge): Frau V. Hillerscheid, Herrn J. Suyono, Herrn I. Steffens, Herrn O. Ruprecht und Herrn M. Haghighi.

Vor allem gilt mein Dank meiner Frau und meinen Kindern, die die immense Arbeitsbelastung in den vergangenen Jahren immer verständnisvoll mitgetragen haben.

Braunschweig, im September 2000

Bodo Specht

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung und Aufgabenstellung	1
2. Stand des Wissens	4
2.1. Modellierung turbulenter Strömungen	4
2.1.1. Ausgangsgleichungen und Gleichungsmittelung	4
2.1.2. Turbulenzmodellierung	9
2.1.3. Behandlung des wandnahen Bereichs	12
2.2. Zur Modellvalidierung geeignete Vergleichsfälle	15
2.2.1. Untersuchungen der Strömung durch einen quadratischen Kanal	15
2.2.2. Untersuchungen der Strömung durch ein längsangeströmtes Stabbündel	21
3. Modellerweiterungen	25
3.1. Turbulenzmodellierung	25
3.1.1. Nichtlineare Turbulenzmodelle	26
3.1.2. Modifizierte Transportgleichungen	30
3.2. Lokale partielle Parabolisierung	31
3.2.1. Randbedingungen	34
3.3. Druck-Geschwindigkeits-Kopplung	38
3.4. Modellierung des wandnahen Bereichs	41
3.5. Normierung des Gleichungssystems	43

4. Numerisches Verfahren	48
4.1. Diskretisierungsverfahren	49
4.1.1. Die Methode der finiten Elemente	50
4.1.2. Netzgenerierung und -analyse	52
4.1.3. Abbruchkriterien und Fehlerbetrachtung	53
4.2. Verfahren zur Effizienzsteigerung	56
4.2.1. Berechnung von Stoffwerten	57
4.2.2. Lösung der algebraischen Gleichungssysteme und Relaxation	57
4.2.3. Modifikation der Diskretisierungen	60
4.3. Verifikation des numerischen Verfahrens	65
4.3.1. Laminare Strömung zwischen zwei ebenen Platten	65
4.3.2. Laminare Strömung durch ein Kreisrohr	71
4.3.3. Laminare Strömung durch ein Stabbündel	76
5. Berechnung turbulenter Strömungen	82
5.1. Wandnahe turbulente Strömungen	82
5.2. Turbulente Strömung durch einen quadratischen Kanal	90
5.2.1. Netzabhängigkeit der Lösung	91
5.2.2. Bewertung linearer Turbulenzmodelle	95
5.2.3. Bewertung nichtlinearer Turbulenzmodelle	101
5.2.4. Modellierung des Wärmeübergangs	109
5.3. Turbulente Strömung durch Stabbündel	112
5.3.1. Unendliche Stabbündel	112
5.3.2. Das 4×4 -Stabbündel	116
6. Zusammenfassung und Ausblick	121
Literaturverzeichnis	123

A. Anhang zur Modellierung	132
A.1. Die gemittelten Bilanzgleichungen	132
A.2. Modellierung der Turbulenz	133
A.2.1. Bilanzgleichungen der Turbulenzfeldgrößen	133
A.2.2. Korrelationen der turbulenten Schwankungsgrößen	135
A.3. Modellierung wandnaher Turbulenz	135
A.4. Modellkoeffizienten	136
A.4.1. Koeffizienten in den Gleichungen für k und ε	136
A.4.2. Koeffizienten der Spannungsmodellierungen	137
A.4.3. Die turbulente Prandtl-Zahl	140
A.4.4. Universelle Wandfunktionen	141
A.4.5. Koeffizienten der low-Re k - ε -Modelle	143
B. Anhang zum numerischen Verfahren	145
B.1. Die algebraischen Gleichungen für den wandnahen Bereich	145
B.2. Die algebraischen Gleichungen für den Kernbereich	147
B.2.1. Bestimmung des Geschwindigkeitsfelds	153
B.2.2. Bestimmung des Druckfelds	154
B.2.3. Bestimmung der Turbulenzenergie und ihrer Dissipation	155
B.2.4. Bestimmung des Temperaturfelds	156

Nomenklatur

Die folgende Tabelle gibt die in dieser Arbeit verwendeten Formelzeichen und deren Einheiten wieder. Die Angabe der Einheit entfällt bei Größen, die mit unterschiedlichen Einheiten behaftet sein können.

Lateinische Buchstaben

a	Kanalabmessung (Abb. 2.2)	m
b	Konstantenvektor	1
c	Konstante (Turbulenzmodell)	1
c_p	spezifische Wärmekapazität	J kg ⁻¹ K ⁻¹
d	Durchmesser	m
e	Einheitsvektor	m
f	Funktion	
g	Erdbeschleunigung	m s ⁻²
h	spezifische Enthalpie	J kg ⁻¹
k	Turbulenzenergie (Gl. 2.8)	m ² s ⁻²
l	Länge	m
n	(dimensionsloser) Normalenvektor	1
p	Druck	Pa
p_{korr}	Druckkorrektur	Pa
\dot{q}	Stromdichte (allgemein)	
r	radiale Koordinate	m
s	spezifische Entropie	J kg ⁻¹ K ⁻¹
t	Zeit	s
u	spezifische innere Energie	m ² s ⁻²
u_τ	Wandschubspannungsgeschwindigkeit	m s ⁻¹
v	Geschwindigkeit	m s ⁻¹
w	Gewichtsfunktion (Gl. 4.5)	1
x	Ort	m
y	Ort, Wandabstand	m
z	Ort, axiale Koordinate	m
A	Matrix (FEM, LGS)	
E	Koeffizient (universelle Wandgesetze)	1
F	Fläche	m ²
G	Gebiet	
H	Abmessung (Abb. 4.1)	m
I	Einheitsmatrix	1
K	Steifigkeitsmatrix (Gl. B.14)	
M	Massenmatrix (Gl. B.14)	
P	Abmessung (Abb. 2.7)	m
Q	Transformationstensor zur lokalen Parabolisierung (Gl. 3.10)	1
R	Radius (Abb. 4.9)	m
S	Deformationstensor (Gl. 3.1)	s ⁻¹
T	Temperatur	K
V	Volumen	m ³

Kalligraphische Buchstaben

\mathcal{P}_k	Produktionsterm der Turbulenzenergie (Gl. A.6)	$\text{m}^2 \text{s}^{-3}$
\mathcal{L}	Differentialoperatoren (Gl. 4.1)	
\mathcal{M}	Differentialoperatoren (Gl. 4.2)	

Griechische Buchstaben

α	Winkel (Abb. 2.7/Gl. 3.10)	1
β	Volumenausdehnungskoeffizient	K^{-1}
β_k	künstliche Kompressibilität (Gl. 3.12)	1
γ	Faktor in der Korrektur der Druckgleichung	s^{-1}
δ	Kroneckersymbol	1
ϵ	Residuum (Gl. 4.4)	
ε	Dissipation der Turbulenzenergie (Gl. A.4)	$\text{m}^2 \text{s}^{-3}$
ϕ	Funktion (Gl. 4.3)	
η	dimensionslose Invariante (Gl. 3.1)	1
κ	von Kármánsche Konstante	1
λ	Wärmeleitfähigkeit	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
λ_f	Reibungsbeiwert (Gl. 2.13)	1
λ_p	Penaltyparameter (Gl. 3.14)	
μ	dynamische Viskosität	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$
μ'	dynamische Volumenviskosität	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$
ν	kinematische Viskosität	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
ν_t	Wirbelviskosität (Gl. 2.10)	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
ξ	dimensionslose Invariante (Gl. 3.2)	1
ρ	Dichte	kg m^{-3}
σ	Gesamtschubspannungstensor (Gl. B.10)	N m^{-2}
$\sigma_{k,\varepsilon}$	Konstante (im k - ε -Modell)	1
τ	Schubspannung, viskoser Spannungstensor (Gl. 2.5)	N m^{-2}
ω	Relaxationsfaktor (Gl. 4.6)	1
Γ	Gebietsrand	
Δ	Differenz	
Φ	Ansatzfunktion (Gl. 4.3), allgemeine Funktion	1
Ω	Rotationstensor (Gl. 3.2)	s^{-1}

Symbole

$\frac{D}{Dt}$	substantielle Ableitung
∂	partielle Ableitung, Berandung
$\overline{\quad}$	Mittelung nach Reynolds
\sim	Mittelung nach Favré
$'$	Schwankungswert nach Reynolds
$''$	Schwankungswert nach Favré
\sim	Proportionalität
$\underline{\quad}$	vektorielle Größe
$\underline{\underline{\quad}}$	tensorielle Größe
$\hat{\quad}$	Wert aus vorhergehender Iteration

Hoch- oder tiefgestellte Indizes

<i>b</i>	mittel (bulk)
<i>d</i>	diffusiv
eff	effektiv
ein	am Eintritt
<i>gl</i>	im Gleichgewicht
<i>h</i>	hydraulisch
<i>is</i>	isotrop
<i>k</i>	konvektiv
<i>m</i>	im Mittel
max	maximal
<i>n</i>	Anteil in Normalenrichtung
<i>p</i>	parabolisiert
<i>r</i>	Rauhigkeit
<i>s</i>	senkrecht
rel	relativ
relax	relaxierter Wert
<i>t</i>	turbulent oder tangential
<i>w</i>	an der Wand
+	dimensionslose Größe im wandnahen Bereich
*	dimensionslose Größe im Kernbereich
0	zur Normierung herangezogene Größe

Kennzahlen (Definitionen siehe Seite 44)

Eu	Euler-Zahl	Druckkraft / Trägheitskraft
Ec	Eckert-Zahl	Temperaturerhöhung durch Energieumwandlung / charakteristische Temperaturdifferenz
Fr	Froude-Zahl	Trägheitskraft / Gravitationskraft
Pé	Péclet-Zahl	konvektiver Wärmetransport / Wärmeleitung
Ma	Mach-Zahl	charakteristische Geschwindigkeit / Schallgeschwindigkeit
Pr	Prandtl-Zahl	Impulsdiffusion / Energiediffusion
Re	Reynolds-Zahl	Trägheitskraft / viskose Kraft
Sl	Strouhal-Zahl	Schwingungsfrequenz / charakteristische Frequenz

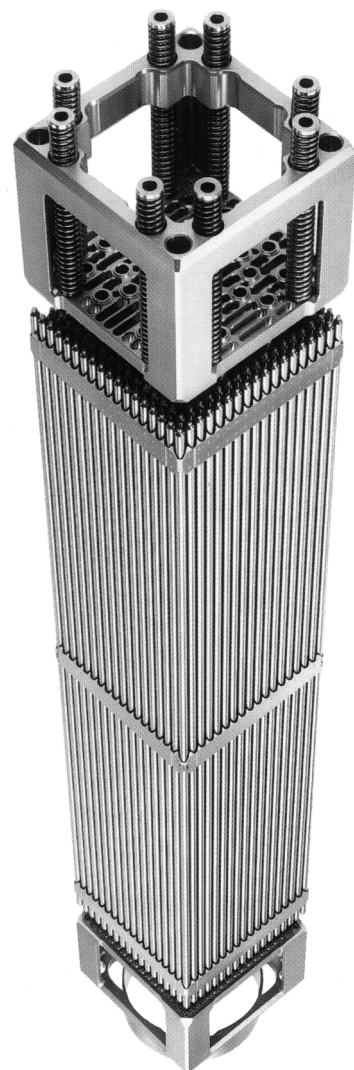
1. Einleitung und Aufgabenstellung

In vielen Bereichen der Energie- und Verfahrenstechnik sind strömende Fluide abzukühlen oder aufzuheizen. Dies erfolgt beispielsweise in Gleich- oder Gegenstromwärmetauschern oder durch Heizstäbe und Kühlrohre. Aus Gründen der Kostenminimierung, eines maximal zugelassenen Bauvolumens und anderen Auslegungsgründen werden die Wärmetauscherrohre oder die Heizstäbe relativ eng angeordnet mit der Folge, daß der Querschnitt der durchströmten Kanäle stark von einem Rohrquerschnitt abweicht und der Wärmeübergang zwischen dem Brennstab und dem Fluid Wasser über dem Umfang stark variiert.

Als längsdurchströmte Stabbündel sind beispielsweise die aus Brennelementen bestehenden Kerne in Leichtwasserreaktoren ausgeführt. Durch die innerhalb des Heizstabes stattfindende Kernspaltung wird der Oberfläche des Brennstabes eine bestimmte Wärmestromdichte aufgeprägt. Bei den Druckwasserreaktoren, der häufigsten Bauart der Leichtwasserreaktoren, ist der Druck im Primärkreis gerade so groß, daß das als Kühlmittel verwendete Wasser – bis auf Bereiche, in denen Oberflächensieden auftritt – einphasig bleibt.

Besondere sicherheitstechnische Bedeutung kommt der Auslegung der Reaktorkerne zu, da die bei der wärmestromkontrollierten Beheizung mögliche Bildung eines isolierenden Dampffilms, die ein Schmelzen der Brennstäbe und damit die Freisetzung radioaktiver Spaltprodukte in den Kühlmittelprimärkreislauf zur Folge hat, zuverlässig verhindert werden muß.

In Ergänzung und zum Teil als Ersatz sehr teurer experimenteller Untersuchungen sind numerische Lösungen zur Ermittlung der lokalen Wärmeübertragung sehr wertvoll. Dazu werden zum Beispiel Rechnungen mit Hilfe von Unterkanalanalyseprogrammen verwendet. Weil die Feldgrößen wie Geschwindigkeit, Druck und Temperatur dabei über Kontrollvolumina gemittelt werden, in denen sie sich in



Ausschnitt eines Stabbündel-Brennelements* [KWU95]

*verkürztes Modell eines FOCUS 18×18-Brennelements der Siemens AG, Bereich Energieerzeugung (KWU)

Wirklichkeit signifikant ändern, benötigt die Unterkanalanalyse Korrelationen beispielsweise für Druckverluste und Wärmeübergänge. Da diese Beziehungen experimentell nur mit hohem Aufwand und meistens nur ungenau zu ermitteln sind, werden oft aus Kreisrohrexperimenten abgeleitete Korrelationen verwendet.

Die detaillierte Berechnung kann einerseits die von der Unterkanalanalyse benötigten Korrelationen liefern und andererseits auf dem Wege der rechnerischen Simulation zeigen, ob und wie Stabbündel mit stark unterschiedlich beheizten Stäben, adiabatischen Stäben, Stäben unterschiedlichen Durchmessers (beispielsweise Steuerstabführungsrohre) usw. mit den in der Unterkanalanalyse verwendeten gemittelten Größen angemessen beschrieben werden können. Auch die Frage, wo in „kritischen“ Unterkanälen der Wärmeübergang am ungünstigsten ist, läßt sich auf diese Weise beantworten. Solche Berechnungen stellen die Unterkanalanalyse auf eine wissenschaftliche Grundlage und ermöglichen eine verbesserte rechnerische Auslegung von Wärmetauschern.

Zur besseren Brennstoffausnutzung kann die Anreicherung des Brennstoffs axial variiert werden. Der Einfluß der resultierenden axial ungleichförmigen Beheizung des Stabbündels kann mit Hilfe eines gut validierten Rechenverfahrens leichter untersucht werden als durch Experimente, bei denen sich Variationen einer axial ungleichförmigen elektrischen Beheizung nur mit großem zeitlichem Aufwand näherungsweise realisieren lassen.

Eine detaillierte Strömungsberechnung kann auch dazu eingesetzt werden, eine Bewertung von experimentellen Ergebnissen mit Hilfe von Sensibilitätsanalysen vorzunehmen. So kann beispielsweise die Wirkung einer Variation der Beheizung auf dem Wege der Berechnung mit geringem Aufwand ermittelt werden.

Aufgabenstellung

Langfristiges Ziel der rechnerischen Auslegung von Stabbündelwärmetauschern ist die detaillierte Vorhersage von Geschwindigkeits-, Druck- und Temperaturverteilungen für die Durchströmung realer Stabbündel, wie in der Abbildung auf der vorhergehenden Seite dargestellt. In dieser Arbeit soll in einem ersten Schritt dazu ein Rechenverfahren entwickelt werden, das eine genaue Berechnung der einphasigen, turbulenten und dreidimensionalen Strömung durch beheizte Stabbündel ohne Einbauten ermöglicht.

Die im Rahmen einer Kooperation der Siemens AG, Bereich KWU, des Nuclear Research Institute Řež und dem Institut für Raumflug- und Reaktortechnik der TU Braunschweig in den Jahren 1992 bis 1995 durchgeführten Experimente belegen neben der bekannten Tatsache einer stark anisotropen Turbulenzstruktur der betrachteten Strömungen durch quadratische Stabgitter, daß die Wandschubspannungsverteilung qualitativ deutlich von der von der laminaren Strömung bekannten Verteilung abweicht. Dieses Ergebnis ist deshalb für die Auslegung von Stabbündeln interessant, weil die Wandschubspannung nach der Reynoldsen Analogie bei Vorgabe eines gleichförmigen Wärmestroms für Fluide wie Luft und Wasser proportional zum Wärmeübergangskoeffizienten ist.

Turbulenzmodelle, die zusätzlich zu Geschwindigkeits-, Druck- und Temperaturfeld zwei Turbulenzfeldgrößen berücksichtigen, können in der meistverwendeten Form (Standard- k - ε -

Modell) die gemessene Wandschubspannungsverteilung in Kanälen nichtkreisförmigen Querschnitts nicht wiedergeben [DR84]. Da im Rahmen dieser Arbeit vor allem der lokale Wärmeübergang berechnet werden soll, ist die Verwendung besser geeigneter Turbulenzmodelle notwendig. Algebraische nichtlineare Turbulenzmodelle erscheinen erfolgversprechend, da sie die Vorhersage anisotroper Turbulenz bei vertretbarem zusätzlichem Rechenaufwand ermöglichen. Eine Validierung neuer nichtlinearer Turbulenzmodelle für dreidimensionale Kanalströmungen soll im Rahmen dieser Arbeit erfolgen.

In Zusammenarbeit mit Electricité de France (EdF) wurde am Institut für Raumflug- und Reaktortechnik der TU Braunschweig in den Jahren 1994 und 1995 die Eignung kommerzieller Strömungssimulationsprogramme zur Berechnung dreidimensionaler Innenströmungen untersucht [Mur95]. Zur Berechnung der untersuchten Strömungen ist eine hohe Netzknotendichte über dem Strömungsquerschnitt notwendig. Durch die axial extrem langgestreckten Kanäle ergaben sich schon bei der Berechnung der unbeheizten Strömung erhebliche Konvergenzprobleme.

Aufgrund der großen axialen Geschwindigkeitskomponente der erzwungenen Strömung bietet sich eine in axialer Richtung schrittweise Lösung der Modellgleichungen an. Sie ist der Strömung angemessen und reduziert den numerischen Aufwand. In dieser Arbeit sollen daher partiell parabolische Modellgleichungen entwickelt werden, die auch im Fall variabler Stoffwerte Gültigkeit besitzen. In diesem Zusammenhang sind auch die an die modifizierten Gleichungen zu stellenden Randbedingungen sorgfältig zu untersuchen.

Die Beheizung ist in realen Stabbündeln so stark, daß deutliche Änderungen der Stoffwerte des Fluids auftreten. Für das zu entwickelnde Berechnungsverfahren soll daher ein Weg zur effizienten Berücksichtigung der realen Stoffwerte für Luft und Wasser gesucht werden. Da die Stoffwerte des Fluids insbesondere in der Nähe der beheizten Wände stark variieren, muß auch die übliche, konstante Stoffwerte voraussetzende Modellierung des wandnahen Bereichs erweitert werden. Die Modellierung soll auch auf den technisch interessanten Fall rauher und beheizter Wände ausgedehnt werden.

Das zu entwickelnde Berechnungsverfahren und die gewählte Modellierung soll anhand geeigneter laminarer und turbulenter Beispielfälle überprüft und die Einsatzmöglichkeiten des Verfahrens exemplarisch dargestellt werden.

Im folgenden Kapitel werden die Modellierung turbulenter Strömungen und die zur Bewertung der Modellierung herangezogenen Experimente in Form eines kurzen Überblicks beschrieben. Das dritte Kapitel stellt die verwendeten nichtlinearen Turbulenzmodelle und die in dieser Arbeit entwickelten Modifizierungen und Modellerweiterungen dar. Das im Rahmen der Arbeit verwendete numerische Verfahren wird einschließlich der neuen Verfahren zur Effizienzsteigerung und der Verifizierung anhand laminarer Strömungen im vierten Kapitel behandelt. Im darauffolgenden Kapitel werden Rechenergebnisse für turbulente Strömungsfälle vorgestellt und der Anwendungsbereich des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten numerischen Simulationsverfahrens dargestellt. Dabei werden die verwendeten Modelle durch einen Vergleich der Ergebnisse mit experimentell ermittelten Strömungsfeldern in Bezug auf ihre Eignung zur Berechnung dreidimensionaler Strömungen durch Stabbündel bewertet.

2. Stand des Wissens

In diesem Kapitel werden die zur Beschreibung beheizter laminarer und turbulenter Strömungen durch Kanäle beliebigen Querschnitts geeigneten Modelle dargestellt und die zur Modellvalidierung herangezogenen Experimente beschrieben.

2.1. Modellierung turbulenter Strömungen

Ausgehend von den Navier-Stokesschen Gleichungen werden in diesem Abschnitt die Grundgleichungen zur Beschreibung turbulenter beheizter Strömungen Newtonscher Fluide vorgestellt. Es werden die dazu notwendigen Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie sowie Materialgleichungen dargestellt. Abweichende Formen in der Literatur sind meist auf die für stark beheizte Strömungen unzutreffende Annahme konstanter Stoffwerte zurückzuführen.

Nachdem begründet wird, warum die Ausgangsgleichungen für technisch interessante turbulente Strömungen einer numerischen Lösung kaum zugänglich sind, wird der Prozeß der Gleichungsmittelung beschrieben. Die Gleichungsmittelung erfolgt in dieser Arbeit nicht unter den oft getroffenen Einschränkungen konstanter Dichte und Stoffwerte, da stark beheizte Strömungen beschrieben werden sollen. Durch die Gleichungsmittelung ergibt sich die Notwendigkeit, die Wirkung der Turbulenz zu modellieren.

Auf die Darstellung der Modellierungsmöglichkeiten und eines zur Beschreibung der betrachteten Strömungen hinreichend allgemeingültigen Zweigleichungsmodells folgt die Erläuterung der Behandlung der aufgrund der Verwendung eines Zweigleichungsmodells notwendigen gesonderten Modellierung des wandnahen Bereichs.

2.1.1. Ausgangsgleichungen und Gleichungsmittelung

Die Gleichungen werden im folgenden für ein kartesisches Koordinatensystem angegeben. Terme der (dimensionslosen) Gleichungen in koordinatenfreier Schreibweise befinden sich in Kapitel 4, falls sie in dieser Form zur Formulierung der Zielgleichungen bei Anwendung der Methode der finiten Elemente benötigt werden.

Ausgangspunkt für die Berechnung beliebiger Strömungen von Kontinua sind die Erhaltungsgleichungen für die Masse, die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0, \quad (2.1)$$

die drei Komponenten der Impulsbilanz

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) v_j = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k} + \rho g_j \quad (2.2)$$

und die Energiebilanz, im folgenden in der Temperaturform (Anmerkungen siehe unten)

$$\rho c_p \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) T = \beta T \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) p - \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial x_k} + \tau_{jk} \frac{\partial v_j}{\partial x_k}. \quad (2.3)$$

In den Gleichungen ist über gleiche Indizes zu summieren (Einsteinsche Summationskonvention).

Die linke Seite der Impulsbilanz kann unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung auch geschrieben werden als

$$\rho \left(\frac{\partial v_j}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) = \rho \frac{Dv_j}{Dt} = \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_j v_k)}{\partial x_k}. \quad (2.4)$$

Die linke Seite wird als schwach konservative und die rechte als streng konservative Form bezeichnet.

Die Gleichungen bilden zusammen mit den konstitutiven Gleichungen für den viskosen Spannungstensor für Newtonsche Fluide

$$\tau_{jk} = \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) + \left(\mu' - \frac{2}{3} \mu \right) \delta_{jk} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}, \quad (2.5)$$

mit $\mu = \rho \nu$, dem Fourierschen Ansatz für die Wärmestromdichte

$$\dot{q}_k = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad (2.6)$$

der thermischen Zustandsgleichung

$$\rho = \rho(p, T) \quad (2.7)$$

sowie Ansätzen für die Transportgrößen λ , c_p , β , μ' und μ bzw. ν ein geschlossenes System zur Bestimmung der Größen Druck, Geschwindigkeit und Temperatur.

Anstelle des Drucks kann auch die Dichte in Abhängigkeit von Ort und Zeit betrachtet werden, falls der Druck durch $p = p(\rho, T)$ und nicht die Dichte durch $\rho = \rho(p, T)$ ausgedrückt

wird. Bei inkompressiblen Strömungen und kompressiblen Strömungen mit kleinen Dichteänderungen, die in dieser Arbeit betrachtet werden, ist die thermische Zustandsgleichung zu verwenden, da ansonsten bei der numerischen Berechnung kleine Fehler in der Dichte große Fehler im Druck verursachen [Sch90].

Die Stokessche Hypothese fordert $\mu' = 0$. Da zudem die Divergenz der Geschwindigkeit meist klein gegen die anderen mit ν behafteten Ausdrücke in der Gleichung für den viskosen Spannungstensor ist, wird im folgenden $\mu' = 0$ angenommen.

Zur Herleitung der Gleichungen und bezüglich der Diskussion der einzelnen Terme im Rahmen einer kontinuumsphysikalischen Betrachtung sei beispielsweise auf [Jis82], [LL86] und [TK90] verwiesen. In der Energiegleichung in der Temperaturform werden zum Teil abweichende Formen für den Druckterm angegeben, da die Druckabhängigkeit der Enthalpie und der Entropie oft keine Rolle spielt. Die in dieser Arbeit verwendete Form der Energiebilanz (2.3) wird in [TK90] hergeleitet und kann auch durch die in [Jis82] angegebene Form mittels

$$\left(\rho \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T - 1 \right) = -\beta T$$

und durch die in [LL86] angegebene Form bei Berücksichtigung des bei inkompressiblen Fluiden für die Energiebilanz vernachlässigbaren, aus der Druckvariation der Entropiedichte resultierenden Terms

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \frac{Dp}{Dt} = -\beta T \frac{Dp}{Dt}$$

abgeleitet werden. Da der Druckterm außer in der Nähe von Stoßwellen klein gegen die anderen Terme der Energiebilanz ist, haben abweichende Formen kaum Bedeutung.

Die Gleichungen (2.1) bis (2.3) lassen sich auch von der Boltzmannschen Transportgleichung, die die Einteilchenverteilungsfunktion beschreibt, ableiten [Gra58], [Bra78]. Dazu muß die Voraussetzung getroffen werden, daß die betrachteten Phänomene in Raumbereichen auftreten, deren Ausdehnung klein gegen die mittlere freie Weglänge der Atome oder Moleküle des Fluids ist; das heißt, daß die betrachteten Größen sich über eine mittlere freie Weglänge nur geringfügig ändern dürfen. Diese Voraussetzung ermöglicht die Kontinuumsnäherung und muß vor Anwendung obiger Gleichungen immer überprüft werden. Wenn die Abmessungen der kleinsten bei Turbulenz in Newtonschen Fluiden auftretenden Wirbel groß gegen die mittlere freie Weglänge sind, können auch turbulente Strömungen mit den obigen Gleichungen beschrieben werden.

Die Impulsbilanz (2.2) gilt für beliebige Fluide. Der lineare Ansatz (2.5) für den viskosen Spannungstensor ist aber auf Newtonsche Fluide beschränkt. In guter Näherung sind dies beispielsweise Wasser und die meisten Gase bei Normalbedingungen. Nichtnewtonsche Fluide wie beispielsweise Blut, manche Farben oder einige organische Lösungen erfordern kompliziertere, in den Geschwindigkeitskomponenten nichtlineare konstitutive Gleichungen.

Ist das Fluid inkompressibel (oder strömt das Fluid mit einer Geschwindigkeit, die klein gegen dessen Schallgeschwindigkeit ist), so gilt $\rho = \text{const.}$ oder $\frac{D\rho}{Dt} = 0$. Daraus folgt mit der Kontinuitätsgleichung (2.1) das Verschwinden der Divergenz des Geschwindigkeitsfelds

($\partial v_j / \partial x_j = 0$). Die Annahme einer konstanten Dichte setzt außer einer vernachlässigbaren Dichteänderung durch Druckgradienten allerdings auch voraus, daß durch Temperaturgradienten ebenfalls nur vernachlässigbare Dichteänderungen entstehen.

Das Verschwinden der Divergenz des Geschwindigkeitsfelds ist daher bei Strömungen ungleichmäßig erwärmter Fluide nur dann näherungsweise gültig, wenn außer einem kleinen Verhältnis von Strömungsgeschwindigkeit zur Schallgeschwindigkeit die im Fluid vorkommenden Temperaturdifferenzen hinreichend klein in dem Sinn sind, daß mit ihnen nur kleine Dichteänderungen verbunden sind [LL86, § 50]. Deshalb darf in dieser Arbeit im Gegensatz zu anderen Arbeiten, in denen unbeheizte Strömungen untersucht werden, nicht die Divergenz des Geschwindigkeitsfelds zu Null gesetzt werden.

Oft wird mit Inkompressibilität daher gleichzeitig die Konstanz aller Stoffwerte bezeichnet. Strömungen mit konstanten Stoffwerten heißen ungekoppelte Strömungen, da die Energiebilanz dann von den Bilanzgleichungen für Masse und Impuls entkoppelt ist; es kann zuerst das System aus Kontinuitäts- und Impulsbilanzgleichungen und danach die Energiebilanz gelöst werden.

Sind die Änderungen der Dichte und der Stoffwerte durch die auftretenden Temperaturdifferenzen nicht vernachlässigbar, so sind die Gleichungen gekoppelt; es müssen alle Bilanzgleichungen zusammen gelöst werden. Da die Kopplung meist nur schwach ist [CB88], bietet sich auch eine iterative Lösungsweise an, bei der abwechselnd das Geschwindigkeits- und das Temperaturfeld berechnet werden.

Inkompressible Strömungen können außer durch die oben beschriebenen Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls also in den abhängigen Variablen \underline{v} und p (den sogenannten primitiven Variablen) auch durch andere Variablen mit den dazugehörigen Erhaltungsgleichungen beschrieben werden, beispielsweise durch \underline{v} und den Wirbelvektor $\text{rot } \underline{v}$ oder den Wirbelvektor und ein Vektorpotential. Solche Formulierungen weisen den Nachteil auf, daß die Wandschubspannungsverteilung von vornherein bekannt sein muß [FP96, Kapitel 7.4.2], und sind entweder auf zweidimensional beschreibbare Strömungen oder konstante Stoffwerte beschränkt oder liefern im dreidimensionalen Fall für die numerische Lösung unökonomische Gleichungssysteme [Sch90]. Im folgenden wird daher die Formulierung in primitiven Variablen gewählt.

Turbulente Strömungen sind grundsätzlich instationär und dreidimensional. Eine direkte numerische Behandlung realer turbulenter Strömungen ist für größere Werte der Reynolds-Zahl und komplexe Kanäle auch auf mittlere Sicht nicht praktikabel. Wenn turbulente Strömungen mit Hilfe des oben angegebenen Gleichungssystems beschrieben werden sollen, muß die Ortsauflösung also so hoch gewählt werden, daß auch die kleinsten Wirbel noch aufgelöst werden. Wie in [YO84] gezeigt, resultiert daraus für die direkte Simulation bei einer Verdopplung der Reynolds-Zahl ein um mindestens eine Größenordnung steigender Rechenaufwand. Die Anzahl der zur Berechnung notwendigen Knotenpunkte wächst mit Re^3 [FP96, Kapitel 9.2]. Da bisherige direkte Simulationen Werte der Reynolds-Zahl von weniger als 10^4 erreichen und die Reynolds-Zahl in den in dieser Arbeit untersuchten Stabbündeln deutlich größer ist (die Reynolds-Zahl der Strömung durch den Kern eines Druckwasserreaktors beträgt etwa

$0.5 \cdot 10^6$), wäre als Voraussetzung einer direkten Simulation solcher Strömungen eine enorme Verbesserung der Rechenleistung erforderlich. Auch die Large Eddy Simulation, bei der nur die Wirkung der kleinsten Wirbel modelliert wird, ist für die hier gestellten Aufgaben zu aufwendig.

Bei der direkten Simulation und der Large Eddy Simulation besteht neben den Nachteilen, daß die Rechnung immer instationär und dreidimensional erfolgen muß und wie bei der direkten Simulation Symmetrieeigenschaften prinzipiell nicht ausgenutzt werden können [FP96, Kapitel 9], das Problem, daß die zur Berechnung notwendigen Anfangs- und Randbedingungen meist nicht bekannt sind [Fer87], [SZL93]. Beide Methoden liefern zudem viel detailliertere Informationen als zur Auslegung benötigt werden.

Von praktischem Interesse ist im allgemeinen nicht die Mikrostruktur, sondern das (zeit-)gemittelte Geschwindigkeits- und Temperaturfeld turbulenter Strömungen. Deshalb bietet sich eine Mittelung der Grundgleichungen an. Dazu werden unterschiedliche Mittelungsverfahren und ihre Eignung für die zu untersuchenden Probleme dargestellt.

Die veränderlichen Größen werden daher aufgespalten in einen mittleren und einen fluktuierenden Anteil:

$$f = \bar{f} + f'$$

mit der Veränderlichen f , deren Mittelwert

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(\tau) d\tau$$

und dem Schwankungswert f' , dessen zeitliches Mittel verschwindet ($\overline{f'} = 0$, Reynoldssche Mittelung).

Das Zeitintervall Δt , über das die Mittelung erfolgt, muß groß genug sein, um die turbulenten Schwankungen zu eliminieren. Es ist bei makroskopisch instationären Strömungen dadurch in der Größe begrenzt, daß Änderungen auf makroskopischer Ebene noch erfaßt werden sollen.

Eine Zerlegung obiger Form wird bei Strömungen inkompressibler Fluide angewendet, für die $\rho = \bar{\rho}$ gilt. Dabei wird auch vorausgesetzt, daß Schwankungen in der Dichte aufgrund von Temperaturfluktuationen vernachlässigbar seien.

Für kompressible Strömungen wird die Zerlegung nach Favré angewendet. Dabei werden die Gleichungen wie oben beschrieben gemittelt, die Geschwindigkeitskomponenten sowie einige Korrelationen und Materialgrößen werden jedoch nicht nach der Reynoldsschen Vorschrift gemittelt, sondern nach

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}$$

dichtegewichtet gemittelt (Favré'sche Mittelung). Die Zerlegung dieser Größen erfolgt dann in

$$f = \tilde{f} + f''$$

mit $\overline{\rho f''} = 0$ und $\overline{f''} = -\overline{\rho' f''} / \bar{\rho} \neq 0$. Bei konstanter Dichte entsprechen sich beide Mittelungsarten; es gilt $\tilde{f} = \bar{f}$ und $f'' = f'$.

Da viele Meßmethoden für turbulente Strömungen dichtegewichtet gemittelte Größen liefern [Hin75] und der tatsächliche Unterschied von zeit- und dichtegewichtet gemittelten Größen bei mäßigen Dichteschwankungen aufgrund von Temperaturschwankungen kaum meßbar sein wird, stellt die Verwendung dichtegewichtet gemittelter Größen keinen Nachteil bezüglich des Vergleichs mit Experimenten dar.

Die Gleichungsmittelung hat nicht nur den Vorteil, daß komplexe turbulente Strömungen auf heute verfügbaren Rechnern berechenbar werden, sondern es ergibt sich erst so ein korrekt gestelltes Problem (eine Lösung existiert, ist eindeutig und kontinuierlich von den Werten der Randbedingungen abhängig). Die dritte Bedingung ist bei der Berechnung hochturbulenter Strömungen mit den nicht gemittelten Gleichungen nicht erfüllt, was keine Auswirkung auf die gemittelten Größen hat, zu deren alleiniger Berechnung aber auch die gemittelten Gleichungen ausreichend sind.

2.1.2. Turbulenzmodellierung

Zur Schließung der durch Mittelung gewonnenen Reynoldsschen oder Favré'schen Gleichungen, die in Anhang A.1 wiedergegeben sind, ist die Modellierung von in den Gleichungen auftretenden Korrelationen von Schwankungsgrößen und damit die Modellierung der Wirkung von Turbulenz notwendig.

Es lassen sich aus den Grundgleichungen Bestimmungsgleichungen für die in den gemittelten Gleichungen (A.2) und (A.3) auftretenden Zweierkorrelationen herleiten, die jedoch wiederum Korrelationen noch höherer Stufe enthalten. Um ein endliches Gleichungssystem zu erhalten, werden nur die Gleichungen verwendet, die Korrelationen bis zu einer bestimmten Ordnung enthalten. Die Gleichungen müssen mindestens all die Größen enthalten, die die Turbulenz ausreichend charakterisieren.

Aufgabe der Turbulenzmodellierung ist neben der Wahl des Abbruchpunktes die Schließung des Gleichungssystems durch empirisch oder theoretisch ermittelte Funktionen für die höchsten auftretenden Korrelationen in Abhängigkeit der mittleren Größen und Korrelationen niedrigerer Stufe so, daß sich ein Gleichungssystem ergibt, welches ebensoviele Gleichungen wie Unbekannte enthält.

Da in Wärmetauschern das Hauptinteresse dem Wärmeübergang gilt, zu dessen Berechnung eine gute Modellierung der Turbulenz wesentliche Voraussetzung ist [So81], muß die Turbulenzmodellierung neben der formalen Schließung des Gleichungssystems vor allem die Wiedergabe der komplexen Turbulenzstruktur der in realen Stabbündeln auftretenden Strömungen leisten.

Formal kann die Wirbelviskosität (Einheit $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$) dargestellt werden als Produkt einer charakteristischen Geschwindigkeit v und einer charakteristischen Länge l : $\nu_t \sim v l$. Die

Wirbelviskosität quantifiziert den Energieübertrag von gerichteter Bewegung in turbulente Bewegung. Im Bild der Energiekaskade muß l also eine Länge in der Größenordnung der energietragenden Wirbel sein und v muß mit der übertragenen Energie verbunden sein: $v \sim \tilde{k}^{1/2}$ und somit $\nu_t \sim \tilde{k}^{1/2} l$ (Kolmogorov-Prandtl) mit der mittleren Energie der Turbulenz

$$\tilde{k} = \frac{1}{2} \widetilde{v_i''^2}. \quad (2.8)$$

Bei den *MVF-Modellen* (von mean velocity field) oder Null-Gleichungs-Modellen wird die Wirbelviskosität direkt aus dem Feld der mittleren Geschwindigkeit und empirischen Funktionen bestimmt. Es werden außer den Reynoldsschen Gleichungen (A.1), (A.2) und (A.3) keine weiteren Differentialgleichungen gelöst (daher Null-Gleichungs-Modelle).

Zur Berechnung der Wirbelviskosität aus dem Feld der mittleren Geschwindigkeit gibt es eine Vielzahl von Ansätzen [Mar86], deren Gültigkeit immer auf spezielle Strömungen beschränkt ist. Sie liefern nur bei Strömungen, die lokal im Gleichgewicht sind, zufriedenstellende Ergebnisse, das heißt dann, wenn der Transport von Turbulenz keine Rolle spielt.

Die *MTE-Modelle* (von mean turbulent energy) umfassen zusätzlich zu den Reynoldsschen Gleichungen eine Transportgleichung für die mittlere Energie der Turbulenz \tilde{k} (Eingleichungsmodelle) oder eine Transportgleichung für \tilde{k} und eine weitere Transportgleichung für die charakteristische Länge, die Dissipation der Turbulenzenergie $\tilde{\varepsilon}$ (siehe Gleichung A.4), eine charakteristische Zeit oder eine charakteristische Frequenz (Zweigleichungsmodelle). Sie erfordern außerdem einen funktionalen Zusammenhang für die Wirbelviskosität in Abhängigkeit der bekannten und der zu berechnenden Größen. Die Dimensionsanalyse liefert $\tilde{\varepsilon} \sim \tilde{k}^{3/2} l^{-1}$ (Jones und Launder) und damit $\nu_t \sim \tilde{k}^2 \tilde{\varepsilon}^{-1}$.

Bei *Ein-Gleichungs-Modellen* ist zur Modellierung der Terme wiederum eine charakteristische Länge vorzugeben, was die gleichen Beschränkungen wie bei den Null-Gleichungs-Modellen mit sich bringt. Sie bieten daher einen gegenüber den Null-Gleichungs-Modellen nur unwesentlich erweiterten Anwendungsbereich und werden daher kaum noch verwendet.

Das Problem der Ein-Gleichungs-Modelle, eine charakteristische Länge a priori vorzugeben, wird von den *Zweigleichungsmodellen* dadurch umgangen, daß eine weitere Transportgleichung für die charakteristische Länge oder äquivalent dazu für die charakteristische Zeit, für die charakteristische Frequenz oder für die Dissipation der Turbulenzenergie zu den Gleichungen hinzugenommen wird. Da turbulente Strömungen bei hohen Werten der Reynolds-Zahl, das heißt dann, wenn der Einfluß der molekularen Viskosität vernachlässigbar ist, durch zwei Skalierungsparameter (beispielsweise die Längen der größten und der kleinsten Wirbel) beschrieben werden können [Pop75], ist die Verwendung von Zweigleichungsmodellen auch aus physikalischen Gründen naheliegend.

Sowohl die Turbulenz als auch die Viskosität entziehen der gerichteten Bewegung Energie und führen sie der Bewegung auf kleineren Längenskalen zu. In beiden Fällen wird gerichtete Bewegung in Wärme umgesetzt, das heißt beide Prozesse wirken auf die Strömung als Energiesenke. Daher liegt ein Ansatz ähnlich dem, wie er für den viskosen Term üblich ist, nahe.

Der bei der Gleichungsmittelung aus dem konvektiven Term resultierende Reynoldssche Spannungstensor in den gemittelten Gleichungen wird so modelliert wie der viskose Spannungstensor in den Navier-Stokes-Gleichungen (2.2):

$$-\widetilde{v_i'' v_j''} = -\frac{2}{3} \delta_{ij} k + \nu_t \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_l}{\partial x_l} \right) \quad (2.9)$$

mit der skalaren Wirbelviskosität

$$\nu_t = c_\mu \tilde{k}^2 / \tilde{\varepsilon}. \quad (2.10)$$

Der Ansatz (2.9) heißt auch Boussinesq-Ansatz (Boussinesq schlug bereits 1877 den Ansatz $-\overline{u'v'} = -\nu_t \partial \overline{u} / \partial y$ für turbulente Grenzschichten vor [Jis82]). Die darin auftretende Wirbelviskosität ist abhängig von der Strömungsform, ist keine Materialkonstante und hat keinen universellen Wert. Sie entspricht anschaulich der scheinbaren Erhöhung der Viskosität durch die Turbulenz.

Eine weitere Gruppe bilden die *Reynoldsspannungsmodelle*. Sie umfassen außer den Reynoldsschen Gleichungen auch die Differentialgleichungen für den Reynoldsschen Schubspannungstensor und die Geschwindigkeits-Temperatur-Korrelationen. Diese Modelle umgehen die mit der Einführung des Wirbelviskositätsmodells verbundenen Schwierigkeiten. Die Modellierung der in den Transportgleichungen des Reynoldsschen Schubspannungstensors und der Geschwindigkeits-Temperatur-Korrelationen auftretenden Terme, insbesondere der Dreierkorrelationen, ist allerdings schwierig.

In [MP89] und [PM89] werden Erweiterungen von Zweigleichungsmodellen zur Modellierung des wandnahen Bereichs (low-Re k - ε -Modelle, siehe Abschnitt 3.4) algebraischen und differentiellen Reynoldsspannungsmodellen gegenübergestellt. Beim Testfall der Berechnung turbulenter Rohrströmungen erwiesen sich die low-Re k - ε -Modelle als besser geeignet, da nur sie beispielsweise den Verlauf der Turbulenzintensität in der Nähe der Wand befriedigend wiederzugeben vermochten.

In dieser Arbeit werden Zweigleichungsmodelle zur Strömungsberechnung herangezogen, da sie die vom Rechenaufwand her effektivste Form der Turbulenzmodellierung darstellen, und durch sie eine angemessene Berechnung der zu untersuchenden Strömungen ohne Vorgabe empirischer Korrelationen für Zeit- oder Längenskalen möglich ist.

Neben der Differentialgleichung für die Turbulenzenergie \tilde{k} wird als zweite Differentialgleichung meist eine Gleichung für die Dissipation $\tilde{\varepsilon}$ verwendet. Beide Gleichungen sind beispielsweise in Abschnitt A.2.1 wiedergegeben. Der Hauptgrund der Wahl von $\tilde{\varepsilon}$ als zweite Größe ist die Konsistenz der empirisch ermittelten Modellkonstanten mit der turbulenten Prandtl-Zahl [LS74], der wesentliche Nachteil die Formulierung der Randbedingung für feste Wände, die entweder asymptotisch inkonsistent ist oder zu einem steifen Differentialgleichungssystem und damit zu numerischen Schwierigkeiten führt [SAA92].

Unter Zuhilfenahme der Turbulenzfeldgrößen \tilde{k} und $\tilde{\varepsilon}$ wird beim Standard- k - ε -Modell der in den gemittelten Impulsbilanzgleichungen auftretende Reynoldssche Spannungstensor (siehe

Anhang A.1) analog zum Ansatz der viskosen Spannungen Newtonscher Fluide als proportional zum Deformationstensor und zur skalaren Wirbelviskosität angenommen. Nach Prandtl wird die in der gemittelten Energiebilanz auftretende Korrelation aus den turbulenten Schwankungen von Geschwindigkeit und Temperatur proportional zum Temperaturgradienten modelliert.

Die Bilanzgleichungen für \tilde{k} und $\tilde{\varepsilon}$ und die Modellierung der Korrelationen der turbulenten Fluktuationen finden sich in Anhang A.2, die Werte und funktionalen Abhängigkeiten für die in den Modellen auftretenden Koeffizienten im Anhang A.4.

2.1.3. Behandlung des wandnahen Bereichs

Die Berechnung der Feldgrößen \tilde{v} , \tilde{k} , $\tilde{\varepsilon}$ und \bar{T} in der Nähe fester Wände ist vor allem aus zwei Gründen schwierig: Zum einen sind die Gradienten der Feldgrößen in Wandnähe sehr groß, was ein in Wandnähe sehr feines numerisches Netz erforderlich macht und damit dreidimensionale Rechnungen nicht mehr zulässt, und zum anderen gelten Zweigleichungsmodelle ohne zusätzliche Modifikationen wie bei low-Re k - ε -Modellen nur unter der Voraussetzung vernachlässigbarer molekularer Viskosität und damit nicht in unmittelbarer Nähe fester Wände.

Beide Probleme lassen sich umgehen, indem die Vorgabe der Randbedingungen nicht direkt an der Wand, sondern in einem geringen Abstand von der Wand erfolgt. Dieses Vorgehen wird im folgenden beschrieben. Es ist problematisch bei schwacher oder starker Beheizung und beim Auftreten von Rezirkulationen, da die verwendeten universellen Wandgesetze dann keine Gültigkeit besitzen. Zudem ist der Wandabstand begrenzt, in dem die Vorgabe von aus universellen Funktionen berechneten Randbedingungen möglich ist.

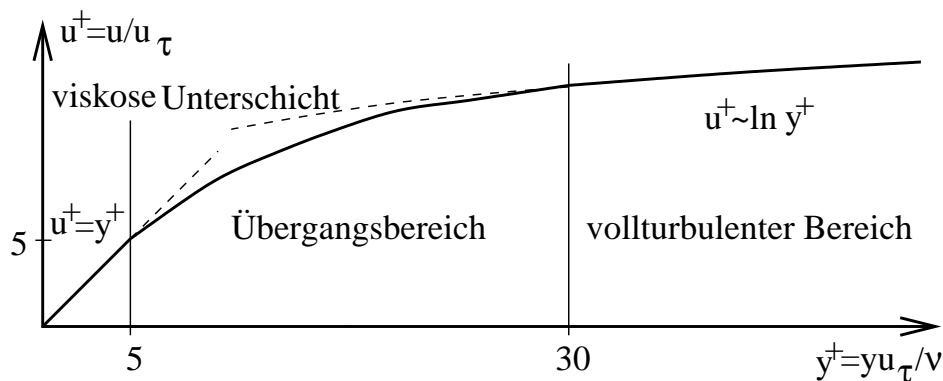


Abbildung 2.1.: Aus Experimenten abgeleitete Einteilung des wandnahen Bereichs, nach [Hin75]

Die aus experimentellen Untersuchungen abgeleitete, also phänomenologisch begründete Motivation zur Einteilung von Innenströmungen in einen wandnahen Bereich und einen Kernbereich, siehe Abbildung 2.1, wobei der wandnahe Bereich direkt durch Bedingungen an der

Wand beeinflusst wird und der Kernbereich nur indirekt durch die Wandschubspannung, sowie eine detaillierte Betrachtung beider Bereiche sind beispielsweise in dem Buch von Hinze wiedergegeben [Hin75]. Die Kopplung des Kernbereichs an den wandnahen Bereich erfolgt in dieser Arbeit deshalb durch Vorgabe von $\underline{v} \underline{n} = 0$ und der Tangentialkomponenten von $\underline{\sigma} \underline{n}$ und nicht durch Vorgabe des Geschwindigkeitsvektors in der wandnächsten Zelle.

Mit den beiden Tangentialvektoren

$$\underline{e}_t = \frac{\tilde{\underline{v}}_{\text{rel}} - (\tilde{\underline{v}}_{\text{rel}} \underline{n}) \underline{n}}{\|\tilde{\underline{v}}_{\text{rel}} - (\tilde{\underline{v}}_{\text{rel}} \underline{n}) \underline{n}\|} \quad \text{und} \quad \underline{e}_s = \underline{n} \times \underline{e}_t \quad \text{mit} \quad \tilde{\underline{v}}_{\text{rel}} = \tilde{\underline{v}} - \underline{v}_w, \quad (2.11)$$

wobei \underline{e}_t der normierte Tangentialvektor aus der Projektion des mittleren Geschwindigkeitsvektors relativ zur Geschwindigkeit der Wand auf die Wand ist, gilt am Übergang vom wandnahen zum Kernbereich $\tilde{\underline{v}} \underline{n} \approx 0$ und für die Komponenten des Spannungstensors $(\underline{\sigma} \underline{n}) \underline{n} = \sigma_n$, $(\underline{\sigma} \underline{n}) \underline{e}_t = \sigma_t$ und $(\underline{\sigma} \underline{n}) \underline{e}_s = 0$. Dabei ist die Tangentialspannung σ_t der Simulation des wandnahen Bereichs zu entnehmen.

Da die Impulsbilanzgleichungen in dieser Arbeit komponentenweise gelöst werden, sind die Bedingungen $\tilde{\underline{v}} \underline{n} = 0$, $(\underline{\sigma} \underline{n}) \underline{e}_t = \sigma_t$ und $(\underline{\sigma} \underline{n}) \underline{e}_s = 0$ in der Regel nicht direkt anwendbar. Es wird daher stattdessen die Randbedingung $\tilde{\underline{v}} \underline{n} = 0$ in der Form

$$\tilde{v}_i = -\frac{1}{n_i} \sum_{j \neq i} n_j \tilde{v}_j \quad (2.12)$$

für die Komponente des mittleren Geschwindigkeitsvektors angewendet, für die n_i maximal ist. Als Randbedingung für die beiden anderen Komponenten der Impulsbilanz wird die Spannung vorgegeben, die sich wegen $\underline{\sigma} \underline{n} = \sigma_n \underline{n} + \sigma_t \underline{e}_t$ zu $(\underline{\sigma} \underline{n}) \underline{e}_j = n_j \sigma_n + (\underline{e}_t)_j \sigma_t$ ergibt.

Im folgenden wird von der Gültigkeit der Haftbedingung $\underline{v} = \tilde{\underline{v}} = \underline{0}$ an festen Wänden und $\underline{v} = \tilde{\underline{v}} = \underline{v}_w$ an bewegten Wänden sowie von einer an der Wand stetigen Temperatur ausgegangen. Die Haftbedingung gilt nur für reibungsbehaftete Strömungen; bei reibungsfreien Strömungen kann nur $v_n = \underline{v} \underline{n} = \tilde{\underline{v}} \underline{n} = 0$ gefordert werden, die Tangentialkomponenten des Geschwindigkeitsvektors sind dann in der Regel von Null verschieden [Hir88]. Beide Bedingungen verlieren außerdem für stark verdünnte Gase ihre Gültigkeit [Hir88], [PPE88]. In [PPE88] wird für die Gültigkeit der Haftbedingung $\text{Ma} < 0.01\sqrt{\text{Re}}$ gefordert. Die Bedingung gilt für sämtliche in dieser Arbeit untersuchten Strömungen.

Bei der Benutzung von Wandfunktionen werden die Randbedingungen nicht direkt an der Wand, sondern in einer gewissen Entfernung von der Wand vorgegeben und für den Verlauf von wandparalleler Geschwindigkeit und Temperatur im dazwischenliegenden Bereich universelle Funktionen (abhängig von Wandbeschaffenheit und Prandtl-Zahl, siehe beispielsweise Anhang A.4.4) angenommen.

Liegt der dimensionslose Wandabstand $y^+ = y u_\tau / \nu$ im Bereich von 30 bis 200, so ist die Spannungstangentialkomponente σ_t konstant und gleich $-\bar{\rho} u_\tau^2$ und es gilt $\mathcal{P}_k \approx \bar{\varepsilon}$, d. h. die Produktion der Turbulenzenergie (A.6) entspricht etwa der Dissipation von Turbulenzenergie. Für konstante Stoffwerte und nicht abgelöste Strömungen existieren universelle Verläufe

für die auf die Wandschubspannungsgeschwindigkeit bezogene, wandparallele Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom dimensionslosen Wandabstand, deren Gültigkeit auch für Strömungen durch Stabbündel im Bereich $30 < y^+ < 500$ experimentell nachgewiesen wurde [Reh78], [Mey94].

Praktisch lassen sich aus einem universellen Verlauf der wandparallelen Geschwindigkeit und dem Gleichgewicht von Turbulenzenergieproduktion und -dissipation auf zwei Arten Randbedingungen für die Differentialgleichungen gewinnen, wenn die Vorgabe aller Geschwindigkeitskomponenten außer Betracht gelassen wird:

- Aus dem Wandabstand und dem Geschwindigkeitsbetrag des wandnächsten Knotens wird mit Hilfe eines universellen Geschwindigkeitswandgesetzes die Wandschubspannungsgeschwindigkeit u_τ berechnet und damit der Wert der Spannungstangentialkomponente σ_t zu $-\bar{\rho} u_\tau^2$ vorgegeben.
Aus der Gleichgewichtsbedingung $\mathcal{P}_k = \tilde{\varepsilon}$ folgen Werte für Dirichlet-Randbedingungen an \tilde{k} und $\tilde{\varepsilon}$: $\tilde{k} = u_\tau^2 / \sqrt{c_\mu}$ und $\tilde{\varepsilon} = c_\mu^{3/4} \tilde{k}^{3/2} / (\kappa y)$ [PRS85].
- Die Wandschubspannungsgeschwindigkeit wird wie bei der ersten Methode ermittelt, es wird aber zusätzlich ein zweiter Wert der Wandschubspannungsgeschwindigkeit aus dem Wert der Turbulenzenergie am wandnächsten Knoten nach $u_k = c_\mu^{1/4} \tilde{k}^{1/2}$ berechnet. Da der Wert der Turbulenzenergie am wandnächsten Knoten dabei benutzt wird, muß für die Turbulenzenergie eine Neumann-Randbedingung angewendet werden ($\partial \tilde{k} / \partial n = 0$ [Smi84], [Utn88], [PRS85]). Für $\tilde{\varepsilon}$ wird die oben angegebene Dirichlet-Randbedingung verwendet, für die Spannungstangentialkomponente σ_t wird $-\bar{\rho} u_\tau u_k$ vorgegeben.

In beiden Fällen wird für die Temperatur eine Neumann-Randbedingung vorgegeben. Ist der Wärmestrom an der Wand bekannt, so kann er als Randbedingung am wandnächsten Punkt vorgegeben werden. Die dabei getroffene Annahme eines innerhalb des wandnahen Bereichs konstanten Wärmestroms ist aufgrund der Dissipation nicht exakt, gilt aber insbesondere bei starker Beheizung. Die Wandtemperatur läßt sich dann mit Hilfe der Temperatur am wandnächsten Knoten, des Wärmestroms und eines universellen Temperaturwandgesetzes bestimmen. Ist die Temperatur an der Wand bekannt, so läßt sich mit Hilfe der Temperatur am wandnächsten Knoten und eines universellen Temperaturwandgesetzes der Wärmestrom bestimmen.

Voraussetzung für beide Vorgehensweisen ist zum einen, daß der dimensionslose Wandabstand im Bereich $30 < y^+ < 200$ liegt, und zum anderen, daß die Stoffwerte sich im betrachteten wandnahen Bereich praktisch nicht ändern. Auch die zur Ableitung der Randbedingungen für die Turbulenzgrößen verwendete Gleichgewichtsbedingung $\mathcal{P}_k = \tilde{\varepsilon}$ ist für nicht eingelaufene Strömungen oft nicht gut erfüllt.

Treten signifikante Stoffwertänderungen auf, so verlieren die universellen Wandgesetze von Geschwindigkeit und Temperatur ihre Gültigkeit und eine Modellierung des wandnahen Bereichs ist unumgänglich.

Für den Druck kann in der Nähe fester Wände eine verschwindende Normalenableitung angenommen werden [Roa72], [Smi84], genauer ist jedoch die Berechnung der Normalenableitung

unter Zuhilfenahme der Impulsbilanz. In Abschnitt 3.3 wird gezeigt, daß eine Vorgabe von Ableitungsrandbedingungen für den Druck gar nicht notwendig ist.

Die in [Mur95] wiedergegebenen Rechenergebnisse wurden unter Verwendung der nach Reynolds gemittelten Gleichungen und eines Zweigleichungsmodells, des k - ε -Modells, mit dem linearen Ansatz (2.9) für die Reynoldsschen Spannungen und der skalaren Wirbelviskosität (2.10) erzielt. Die dabei verwendeten konstanten Koeffizienten sind zum Beispiel in [LS74] angegeben und auch in Tabelle A.1 wiedergegeben. Der wandnahe Bereich wird bei dem Programm *FLOTRAN* durch Vorgabe von $\underline{v} = \underline{0}$ an der Wand und einer speziellen Behandlung des wandnächsten Elements und bei dem Programm *N3S* durch Vorgabe der Wandschubspannung an den wandnächsten Elementen modelliert. Beide Programme nutzen dazu universelle Wandgesetze.

2.2. Zur Modellvalidierung geeignete Vergleichsfälle

Die Modellvalidierung muß anhand experimentell ermittelter Strömungsfelder erfolgen. Dazu sollten Profile der mittleren und der turbulenten Größen dreidimensionaler Strömungen am Eintritt und an unterschiedlichen axialen Positionen bestimmt worden sein, um einen sinnvollen Vergleich von Turbulenzmodellen zu ermöglichen. Da die Modelle in Hinblick auf eine Anwendung auf Strömungen durch Stabbündel optimiert werden sollen, kommen nur dreidimensionale Innenströmungen mit vergleichbaren Werten der Reynolds-Zahl in Betracht.

Diese Voraussetzungen erfüllen die in [Mur95] verwendeten Messungen der Durchströmung eines quadratischen Kanals. Die Verwendung dieses Validierungsfalls hat außerdem den Vorteil, daß ein Vergleich mit kommerziellen Programmen und den damit erzielten Ergebnissen möglich ist.

Als weitere experimentelle Untersuchung wird die am Nuclear Research Institute Řež vermessene Strömung durch ein Stabbündel zur Validierung der Turbulenzmodelle verwendet. Durch einen Vergleich der gemessenen mit der berechneten Wandschubspannungsverteilung kann eine Aussage auf die bei der Simulation des lokalen Wärmeübergangs in Stabbündeln zu erwartende Güte des in dieser Arbeit entwickelten Verfahrens getroffen werden.

2.2.1. Untersuchungen der Strömung durch einen quadratischen Kanal

Der untersuchte Kanal gleichförmigen Querschnitts weist die aus Abbildung 2.2 ersichtliche Geometrie auf. Als Fluid wird Luft verwendet und die mittlere Geschwindigkeit wird so eingestellt, daß sich eine Reynolds-Zahl von 250 000 ergibt. Die Materialwerte und charakteristischen Größen der Strömung sind in Tabelle 2.1 wiedergegeben.

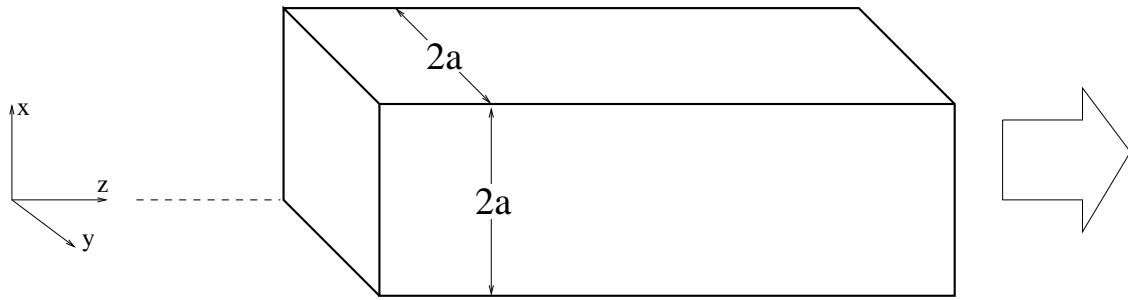


Abbildung 2.2.: Geometrie des quadratischen Kanals

T	$= 20\text{ °C}$	v_b	$= 14.78\text{ m/s}$
p	$= 1013\text{ hPa}$	a	$= 0.128\text{ m}$
ρ	$= 1.205\text{ kg/m}^3$	d_h	$= 0.254\text{ m}$
ν	$= 1.51 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$	Re	$= 2.49 \cdot 10^5$
c_p	$= 1006.8\text{ J/(kg K)}$	Pr	$= 0.704$
β	$= 0.00342\text{ 1/K}$	Pé	$= 1.75 \cdot 10^5$
λ	$= 0.02602\text{ W/(m K)}$		

Tabelle 2.1.: Materialwerte des Fluids am Kanaleintritt und charakteristische Größen der untersuchten turbulenten Strömung durch einen quadratischen Kanal

Beschreibung des Experiments

Die zur Modellvalidierung verwendeten Experimente wurden von Gessner, Lund und Po durchgeführt. Ergebnisse sind in [Po75], [Lun77], [GPE79] und [GE81] veröffentlicht. Der Aufbau der Versuchsanlage ist beispielsweise in [GPE79] wiedergegeben. Die Länge des Kanals gleichförmigen Querschnitts beträgt 22 m, entsprechend etwa 87 hydraulischer Durchmesser. Turbulenzmessungen wurden mit Hilfe von Hitzdrahtanemometern, Druckdifferenzmessungen mit Hilfe eines Mikromanometers und die Messungen der Wandschubspannungsverteilung mit Hilfe von Prestonrohren vorgenommen.

Charakteristisch für die betrachtete Strömung ist die Ausbildung von Sekundärströmungen aufgrund von Differenzen in den turbulenten Normalspannungen. Die Sekundärströmungen führen zu einer Verformung der Geschwindigkeitsisolinen in Richtung der Kanalecken und zu einem Wandschubspannungsminimum jeweils in der Mitte jeder Wand.

Die Eintrittsrandbedingungen werden in [GPE79] angegeben. Mit einem Turbulenzgrad von weniger als 0.0035 und einer annähernd homogenen Strömung kommt die Strömung bei $z = 0$ einer laminaren Kolbenströmung sehr nahe. In [GPE79] wird empfohlen, den Eintrittsrand mit homogenem Geschwindigkeitsfeld etwa bei $z = -0.65 d_h$ zu wählen. Dieselben Autoren wählen in [GE81] bei einer eigenen Simulation allerdings $z = 0$ als Position des Eintrittsrandes. Da die Differenz in der Lage des Eintrittsrandes im Verhältnis zu der betrachteten Kanallänge sehr klein ist und auch in [Mur95] der Eintrittsrand bei $z = 0$ liegt, wird diese Wahl auch in dieser Arbeit getroffen.

Der Reibungsbeiwert läßt sich bei eingelaufener Strömung mit Hilfe der mittleren Wandschubspannung $\overline{\tau_w}$ oder im Fall eines über den Querschnitt konstanten Drucks mit dem axialen Druckgradienten dp/dz und dem hydraulischen Durchmesser (vier mal Strömungsquerschnitt durch benetzten Umfang) mittels

$$\lambda_f = \frac{8 \overline{\tau_w}}{\rho v_b^2} = -\frac{2 d_h}{\rho v_b^2} \frac{dp}{dz} \quad (2.13)$$

berechnen. Der Wert beträgt nach [GE81, Abbildung 4] etwa $1.38 \cdot 10^{-2}$. Zusammen mit dem in [GE81] angegebenen Meßfehler ergibt sich für den experimentell bestimmten Reibungsbeiwert $\lambda_f = (1.38 \pm 0.10) \cdot 10^{-2}$ entsprechend einem Druckverlust von $-\frac{\partial p}{\partial z} = (7.15 \pm 0.50) \frac{\text{Pa}}{\text{m}}$.

Mit der in [VDI84, Kapitel Gb] angegebenen Korrelation von Filonenko

$$\lambda_{f,\text{Filonenko}} = (1.82 \lg \text{Re} - 1.64)^{-2} \quad \text{für} \quad 2300 < \text{Re} < 10^6 \quad (2.14)$$

ergibt sich $\lambda_{f,\text{Filonenko}} = 1.49 \cdot 10^{-2}$ für $\text{Re} = 2.5 \cdot 10^5$. Nach [BS87, Gleichung 4.108a] beträgt der Druckverlust in quadratischen Kanälen für $5000 < \text{Re} < 10^7$ jedoch nur 97.5% des entsprechenden Wertes von Kreisrohren mit dem gleichen hydraulischen Durchmesser. Dabei wird die Korrelation von Techo für Kreisrohre

$$\lambda_{f,\text{Techo}} = \left(0.8686 \ln \frac{\text{Re}}{1.964 \ln \text{Re} - 3.8215} \right)^{-2} \quad \text{für} \quad 10^4 < \text{Re} < 10^7 \quad (2.15)$$

empfohlen. Für $\text{Re} = 2.5 \cdot 10^5$ ist $\lambda_{f,\text{Techo}} = 1.50 \cdot 10^{-2}$ also fast genau der Wert der Korrelation von Filonenko aus [VDI84]. Nach [BS87, Abbildung 4.21 und Gleichung 4.32] gibt die Korrelation von Blasius

$$\lambda_{f,\text{Blasius}} = 0.316 / \sqrt[4]{\text{Re}} \quad \text{für} \quad 4000 < \text{Re} < 10^5 \quad (2.16)$$

den Druckverlust der turbulenten Strömung durch quadratische Kanäle gut wieder. Für $\text{Re} = 2.5 \cdot 10^5$ liegen die Werte aller drei Korrelationen

$$\begin{aligned} \lambda_{f,\text{Blasius}} &= 1.41 \cdot 10^{-2}, \\ 0.975 \lambda_{f,\text{Techo}} &= 1.46 \cdot 10^{-2} \quad \text{und} \\ 0.975 \lambda_{f,\text{Filonenko}} &= 1.45 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

im Rahmen des experimentell bestimmten Bereichs.

Mit dem bekannten Reibungsbeiwert läßt sich mit der in [VDI84, Gb3] und [BS87, Tabelle 4.4] angegebenen Korrelation von Gnielinski

$$\text{Nu} = \frac{(\lambda_f/8)(\text{Re} - 1000)\text{Pr}}{1 + 12.7\sqrt{\lambda_f/8}(\text{Pr}^{2/3} - 1)} \quad \text{für} \quad 2300 < \text{Re} < 5 \cdot 10^6 \quad \text{und} \quad 0.5 < \text{Pr} < 2000 \quad (2.17)$$

die Nußelt-Zahl zu $\text{Nu} = 335 \pm 26$ bestimmen.

Die axiale Entwicklung des Geschwindigkeitsfeldes wurde von Gessner vermessen. Die in [GPE79] und [GE81] veröffentlichten Ergebnisse für die axiale Geschwindigkeitskomponente differieren zum Teil um einen Wert, der außerhalb des angegebenen Meßfehlers von $\pm 0.01 v_b$

liegt. Den berechneten Ergebnissen werden immer die in beiden Veröffentlichungen angegebenen Werte gegenübergestellt. In [GE81] sind auch die von Gessner und Lund bestimmten Geschwindigkeitskomponenten in der Querschnittsebene an zwei axialen Positionen wiedergegeben. Da die Querströmungskomponenten im Vergleich zur Hauptströmungskomponente klein sind, ist eine deutliche Streuung der Werte und ein im Verhältnis zu den Absolutwerten der Querströmungskomponenten großer Fehler ($\pm 0.002 v_b$ nach [GE81]) zu verzeichnen.

Po hat die turbulenten Spannungen und damit die Turbulenzenergie entlang von Linien von einer Kanalecke und einer Wandmitte zum Zentrum des Kanals für verschiedene axiale Positionen vermessen [Po75]. Der Meßfehler für die Turbulenzenergie liegt nach [GE81] dabei unter $\pm 4.5 \cdot 10^{-4} v_b^2$.

Die zur Bestimmung des lokalen Wärmeübergangs interessante Wandschubspannungsverteilung wurde von Lund gemessen [Lun77] und ist auch in [GE81] wiedergegeben. Der Meßfehler ist in [GE81] mit $\pm 0.02 \overline{\tau_w}$ angegeben.

Vergleich mit Rechnungen

In [Mur95] werden Simulationen der turbulenten Strömung durch den oben beschriebenen quadratischen Kanal mit den kommerziellen Strömungssimulationsprogrammen *N3S* und *FLOTRAN* beschrieben. Mit beiden Programmen war eine Berechnung des Kanals in einem Stück selbst bei einer mit zehn mal zehn Elementen für ein Viertel des Kanals groben Diskretisierung und unter Verwendung konstanter Stoffwerte und eines Standard- k - ε -Modells und universellen Wandfunktionen sehr langwierig (mehr als 24 Stunden Rechenzeit auf einer Workstation vom Typ IBM 580 H) beziehungsweise führte zu keinem konvergenten Ergebnis. Erst die schrittweise Berechnung des Kanals führte zu brauchbaren Ergebnissen und kürzerer Rechenzeit [Mur95].

Die Ergebnisse der durchgeführten Rechnungen sind in den Abbildungen 2.3, 2.4, 2.5 und 2.6 zusammen mit den experimentell ermittelten Werten dargestellt.

Bei den mit *N3S* durchgeführten Rechnungen ließ sich der Kanal wegen der Speicherplatzlimitierung nicht in einem Stück behandeln. Es erwies sich für Rechenzeit und Speicherplatz am günstigsten, den Kanal in etwa vier hydraulische Durchmesser großen Abschnitten zu berechnen. Mit dem Programm *FLOTRAN* war bei der Berechnung des gesamten Kanals in einem Stück keine befriedigende Konvergenz zu erzielen. Auch die schrittweise Berechnung des Kanals führt mit *FLOTRAN* zu erheblichen Problemen (unbefriedigendes Druckfeld mit Druckspitzen).

Die axiale Entwicklung des Geschwindigkeitsfeldes wurde, wie Abbildung 2.3 zeigt, von den mit dem Programm *N3S* durchgeführten Simulationen außer in Wandnähe mit mäßigen Abweichungen getroffen. Das Programm *FLOTRAN* lieferte eine geringere Übereinstimmung (in Abbildung 2.3 sind für *FLOTRAN* Ergebnisse für $y/a = 1.00, 0.65, 0.40, 0.18$ und 0.09 wiedergegeben).

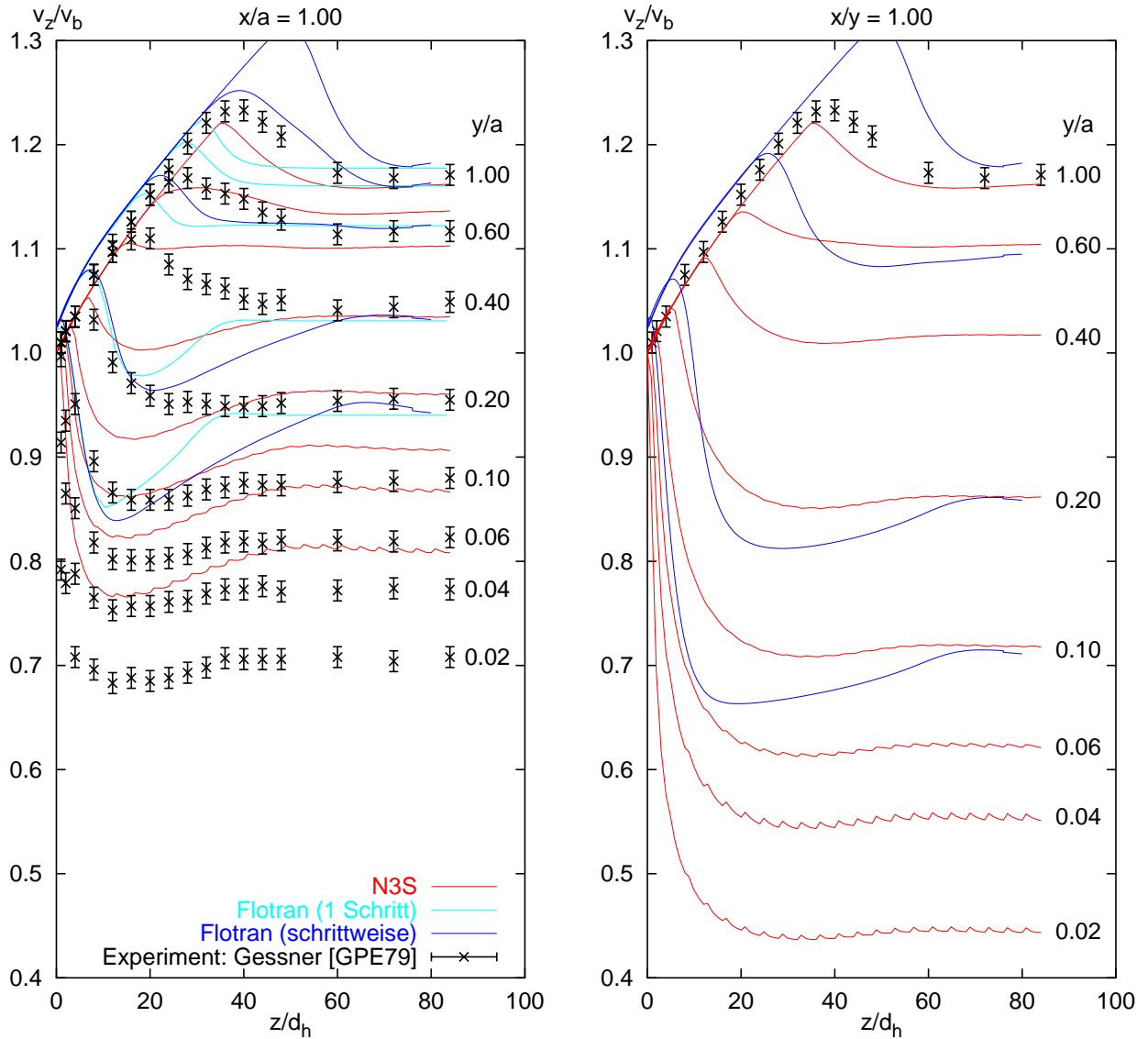


Abbildung 2.3.: Entwicklung der axialen Geschwindigkeitskomponente über der Kanallänge für unterschiedliche Positionen zwischen Wandmitte bzw. Ecke und Kanalzentrum

In den Abbildungen 2.4 und 2.5 sind die Werte der axialen Geschwindigkeitskomponente und der Turbulenzenergie den experimentell ermittelten Werten gegenübergestellt. Die Abbildungen zeigen zum einen, daß die in [GPE79] und [GE81] veröffentlichten experimentellen Daten für die Geschwindigkeit etwas voneinander abweichen. Zum anderen wird wieder deutlich, daß die mit $N3S$ berechneten Werte die tatsächlichen Werte etwas besser treffen als die $FLOTRAN$ berechneten, aber beide Simulationen bezüglich des Geschwindigkeitsverlaufs in Wandnähe qualitativ die gleichen Abweichungen zeigen. Die Abweichungen sind vor allem auf die in der Berechnung fehlenden Sekundärströmungen zurückzuführen. Die auftretenden Sekundärströmungen können bei Verwendung des Standard- $k-\varepsilon$ -Modells prinzipiell nicht berechnet werden, da die Modellierung der turbulenten Normalspannungen dafür unzureichend ist.

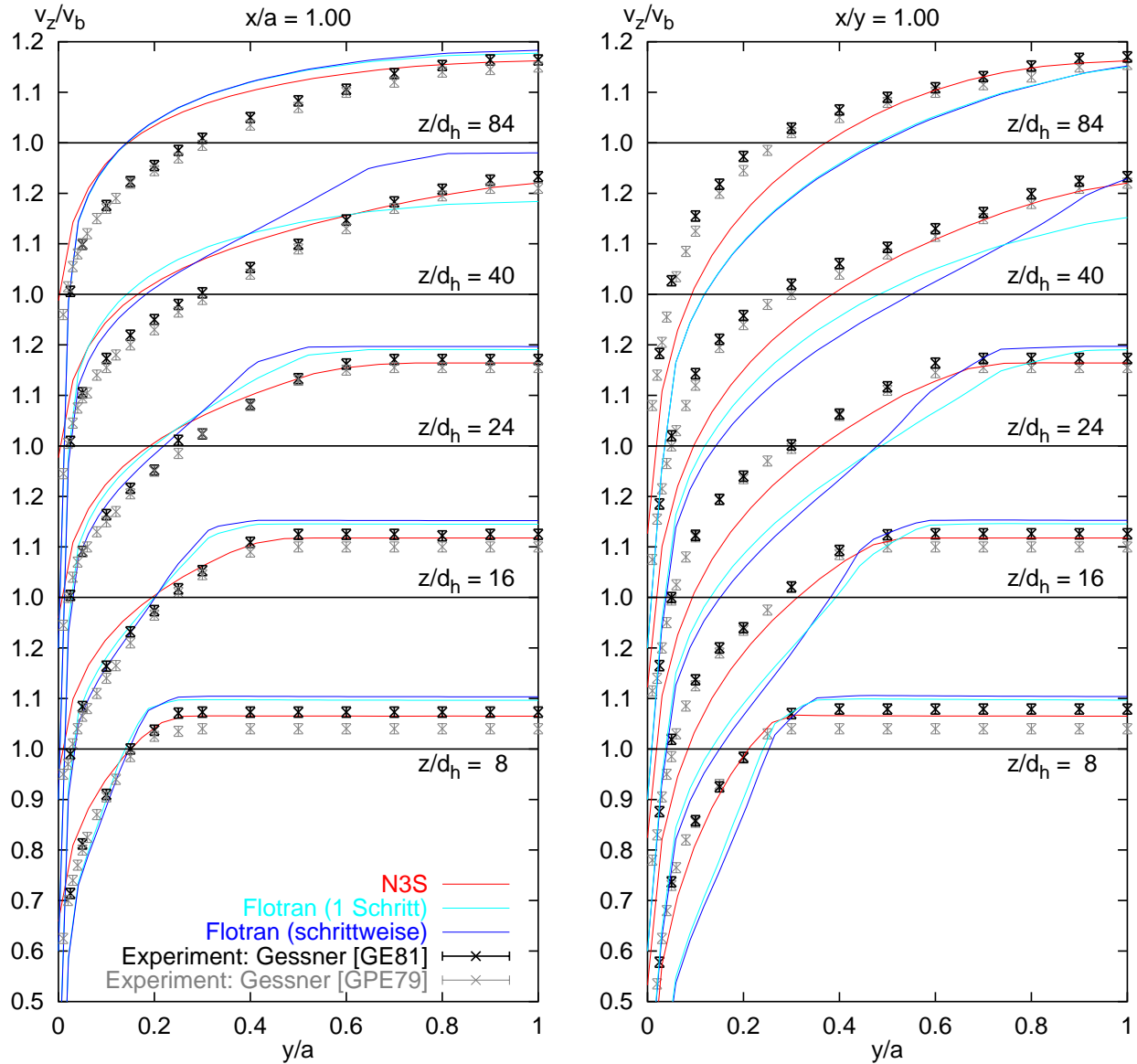


Abbildung 2.4.: Verlauf der axialen Geschwindigkeitskomponente auf Geraden von der Wandmitte und der Ecke zum Kanalzentrum für unterschiedliche axiale Positionen

Die mangelhafte Modellierung der turbulenten Normalspannungen und die fehlenden Sekundärströmungen führen auch zu dem in Abbildung 2.6 wiedergegebenen qualitativ falschen Verlauf der Wandschubspannung. Während in der mit *FLOTRAN* durchgeführten Simulation trotz des unbefriedigenden Druckfeldes der Druckverlustbeiwert im entwickelten Fall mit $\lambda_f = 1.41 \cdot 10^{-2}$ im Bereich der Meßwerte liegt, liefert das Programm *N3S* mit $\lambda_f = 1.27 \cdot 10^{-2}$ (berechnet mit Hilfe des Druckgradienten) einen Wert, der bereits außerhalb des durch die Experimente gesicherten Wertebereichs liegt und zudem noch um etwa 15 % schwankt.

Für eine gute Berechnung des lokalen Wärmeübergangs sind somit für den Fall langgestreckter Kanäle sowohl bezüglich des Rechenverfahrens als auch in Hinsicht auf die Turbulenzmodellierung Verbesserungen notwendig.

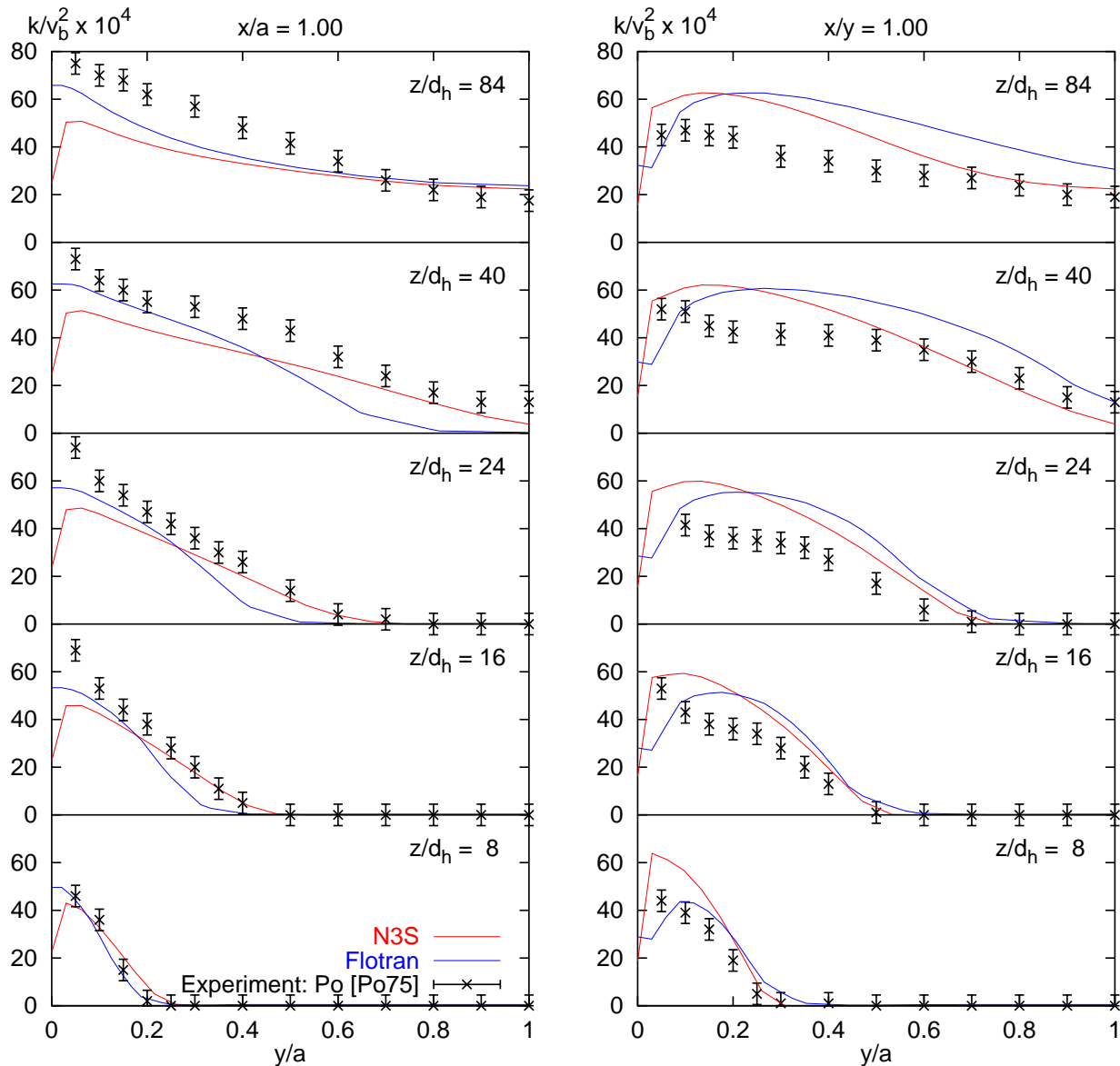


Abbildung 2.5.: Verlauf der Turbulenzenergie auf Geraden von der Wandmitte und der Ecke zum Kanalzentrum für unterschiedliche axiale Positionen

2.2.2. Untersuchungen der Strömung durch ein längsangeströmtes Stabbündel

Um das zu entwickelnde Simulationsverfahren bezüglich der Berechnung des lokalen Wärmeübergangs in Stabbündeln bewerten zu können, wurden die am Nuclear Research Institute Řež vermessenen Strömungen durch ein Sechzehnstabbündel herangezogen. Sie zeigen einerseits – ebenso wie die turbulente Strömung durch den quadratischen Kanal – einen Wand Schubspannungsverlauf, der sich qualitativ von dem Verlauf bei laminarer Strömung und dem mit dem Standard- k - ε -Modell berechneten Verlauf unterscheidet. Andererseits entspricht die Geometrie des Stabbündels der von Wärmetauschern, wie sie bei Druckwasserreaktoren Anwendung finden.

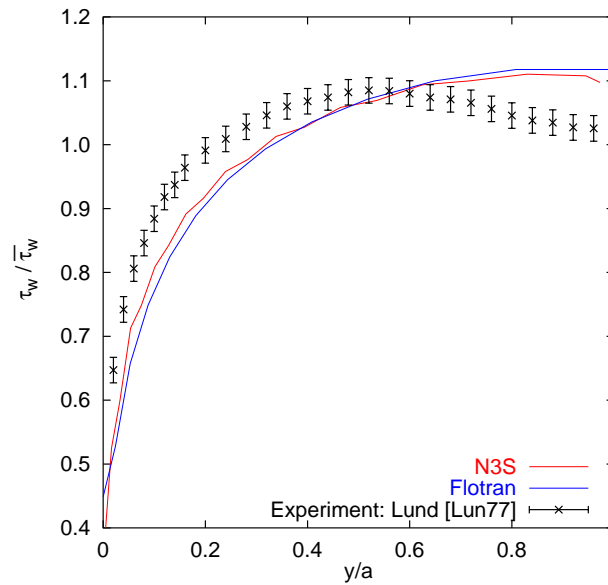


Abbildung 2.6.: Verlauf der Wandschubspannung im quadratischen Kanal für den eingelaufenen Fall ($z/d_h = 84$)

Beschreibung des Experiments

Der experimentelle Aufbau besteht aus einem Sechzehnstabbündel, durch das Luft unter Umgebungsbedingungen gesogen wird. In Abbildung 2.7 ist der Kanalquerschnitt dargestellt, aus Tabelle 2.2 sind die charakteristischen Werte der Strömung zu entnehmen.

T	$= 20\text{ °C}$	v_b	$= 19.58\text{ m/s}$
p	$= 1013\text{ hPa}$	P/d	$= 1.337$
ρ	$= 1.205\text{ kg/m}^3$	W/d	$= 1.326$
ν	$= 1.51 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$	d_h	$= 128.4\text{ mm}$
c_p	$= 1006.8\text{ J/(kg K)}$	Re	$= 1.7 \cdot 10^5$
β	$= 0.00342\text{ 1/K}$	Pr	$= 0.704$
λ	$= 0.02602\text{ W/(m K)}$	Pé	$= 1.2 \cdot 10^5$

Tabelle 2.2.: Materialwerte des Fluids am Kanaleintritt und charakteristische Größen der untersuchten turbulenten Strömung durch ein Stabbündel [Mur95]

Die Geschwindigkeitsfelder und die turbulenten Spannungen wurden in allen Quadranten um die Stäbe 1, 2, 3 und 8 mit Hilfe von Hitzdrahtanemometern vermessen. Wandschubspannungsverteilungen entlang der Stabumfänge wurden mit Prestonrohren bestimmt.

Da der Kanal etwa 47 hydraulische Durchmesser lang ist, ist die Strömung am Kanalausstritt nur annähernd voll entwickelt. Charakteristisch für die Wandschubspannungsverteilungen um die inneren Stäbe sind deutliche Minima nicht nur in Richtung der Spalte sondern auch in Richtung der Unterkanalzentren. Die Minima in Richtung der Unterkanalzentren treten weder im Fall laminarer Strömung [SL59] noch bei der rechnerischen Simulation der turbulenten Strömung mit Hilfe des Standard- k - ε -Modells auf.

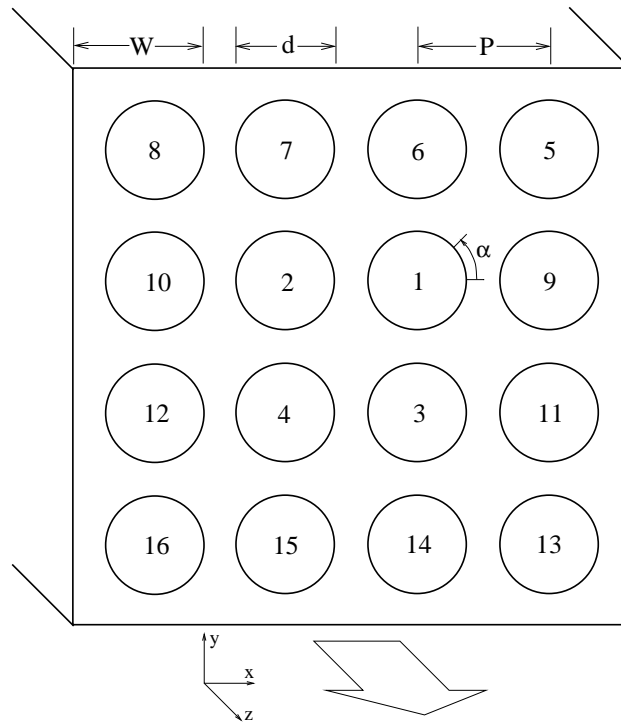
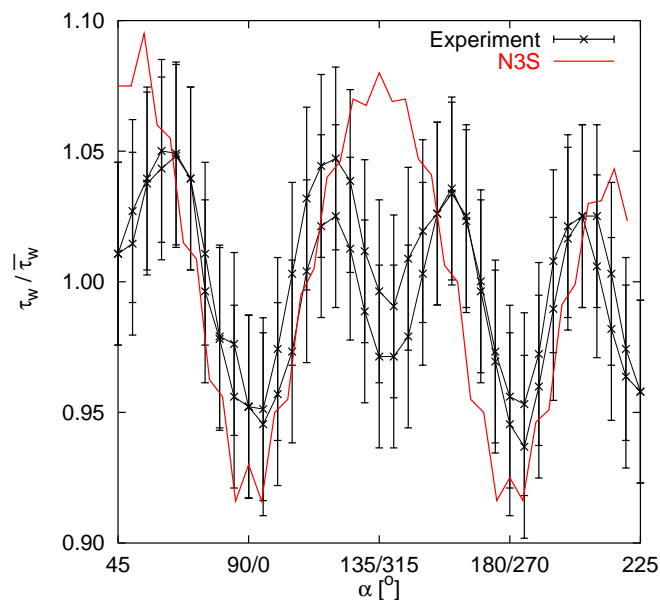


Abbildung 2.7.: Geometrie des Sechzehnstabbündels

Vergleich mit Rechnungen

Abbildung 2.8.: Verlauf der Wandschubspannung um Stab 1 ($z/d_h = 44$)

Da eine Validierung des zu entwickelnden Simulationsverfahrens in Hinblick auf die Entwicklung der Geschwindigkeits- und Turbulenzenergieverteilung anhand der oben beschriebenen Strömung durch einen quadratischen Kanal erfolgt, liegt der Schwerpunkt bei dem Vergleich

der Rechenergebnisse mit den am Stabbündel durchgeführten Experimenten auf der Wandschubspannungsverteilung.

Die in [Mur95] dargestellten Ergebnisse unter Benutzung des Programms $\mathcal{N3S}$ zeigen – ebenso wie die Simulationen der oben beschriebenen Kanalströmung – eine Wandschubspannungsverteilung, die sich qualitativ von der tatsächlichen Wandschubspannungsverteilung unterscheidet (siehe Abbildung 2.8). Die Unterschätzung der mittleren Wandschubspannung und des Druckabfalls und damit des Reibungsbeiwerts durch die Simulation fällt mit 10 bis 20 % noch deutlicher aus als bei der Simulation der Strömung durch den quadratischen Kanal. Auch der sprunghafte Verlauf der berechneten Wandschubspannung fällt in Abbildung 2.8 auf.

3. Modellerweiterungen

Wie im vorangegangenen Kapitel deutlich wird, muß die auf Basis des Standard- k - ε -Modells vorgenommene Turbulenzmodellierung verbessert werden, um in längsangeströmten Stabbündeln den gemessenen Wandschubspannungsverlauf und damit den lokalen Wärmeübergang treffend wiedergeben zu können. Die in dieser Arbeit angewendeten Modifikationen und Erweiterungen des Standard- k - ε -Modells werden im ersten Teil des Kapitels beschrieben.

Die aufgrund der großen axialen Strömungskomponente phänomenologisch naheliegende partielle Parabolisierung vereinfacht die numerische Lösung der Gleichungen. Ein neu entwickeltes Verfahren zur lokalen partiellen Parabolisierung des Gleichungssystems wird im zweiten Abschnitt dieses Kapitels vorgestellt. In dieser Arbeit wird der Druck mit Hilfe einer neuartig modifizierten Poissongleichung berechnet, die im dritten Abschnitt dieses Kapitels erläutert wird.

Anschließend wird die in dieser Arbeit angewendete eindimensionale Modellierung des wandnahen Bereichs einschließlich einer Erweiterung auf den Fall rauher Wände vorgestellt. Eine kurze Beschreibung der vorgenommenen Normierung des Gleichungssystems, die von der üblichen Normierung abweicht, da in dieser Arbeit auch die Turbulenzfeldgrößen auf 10^0 normiert werden, bildet den Abschluß des Kapitels.

3.1. Turbulenzmodellierung

Der Vorteil des in Abschnitt 2.1.2 beschriebenen Wirbelviskositätskonzepts liegt in seiner Einfachheit; dessen größter Nachteil ist die Voraussetzung isotroper Viskosität. Es wird heute übereinstimmend angenommen, daß die stärksten Einschränkungen des Standard- k - ε -Modells aus der Benutzung des linearen Spannungsansatzes (2.9) und der zu stark vereinfachten Bilanzgleichung (A.7) für die turbulente Dissipation resultieren [Ben88b], [YOT⁺92].

Um die stark anisotrope Turbulenz in längsangeströmten Stabbündeln gut beschreiben zu können, werden neue nichtlineare Turbulenzmodelle vorgestellt, die möglichst allgemeingültig gehalten und gleichzeitig numerisch effizient lösbar sind. Im zweiten Teil dieses Abschnitts werden vom Standard- k - ε -Modell abweichende Modellierungen der Dissipationsgleichung kurz dargestellt.

3.1.1. Nichtlineare Turbulenzmodelle

Die im linearen Ansatz für die Reynoldsschen Spannungen (2.9) enthaltene Voraussetzung isotroper Wirbelviskosität führt unter anderem dazu, daß Ablösepunkte an gekrümmten Oberflächen falsch vorausgesagt werden und Sekundärströmungen im zweidimensionalen Fall und in nicht kreisförmigen Kanälen nicht berechnet werden können [Pop75]. Experimentelle Untersuchungen belegen, daß selbst die turbulenten Spannungen in Kreisrohren und einfachen Scherströmungen anisotrop sind [Hin75]. Da die Turbulenzstruktur der Strömung durch Stabbündel ausgeprägt anisotrop ist [Reh78], [Sea79], sind isotrope Wirbelviskosität voraussetzende Turbulenzmodelle zur deren detaillierter Berechnung nicht geeignet.

Soll auch nichtisotrope Turbulenzviskosität Berücksichtigung finden, so muß der Isotropie voraussetzende lineare Ansatz mit skalarer Wirbelviskosität nach Gleichung (2.9) durch einen entsprechenden Ansatz mit Wirbelviskositätstensor oder einen nichtlinearen Ansatz ersetzt werden oder es müssen die in den Transportgleichungen auftretenden Korrelationen durch aus den Differentialgleichungen für die Korrelationen zweiter Ordnung gewonnenen algebraischen Ausdrücke in Abhängigkeit von den gemittelten Größen sowie \tilde{k} und $\tilde{\varepsilon}$ ersetzt werden (algebraische Reynoldsspannungsmodelle).

Es gibt Modelle, die zur Berechnung der anisotropen Turbulenzstruktur einen konstanten Wirbelviskositätstensor anstelle einer skalaren Wirbelviskosität verwenden. Sie haben jedoch meist einen sehr eingeschränkten Anwendungsbereich, da sie üblicherweise an spezielle Strömungen angepaßt sind [Ben88b]. Zudem wird meist ein konstanter Wirbelviskositätstensor zweiter Stufe benutzt, der zur Beschreibung realer turbulenter Strömungen nicht ausreichend ist. Ein linearer Ansatz für die turbulenten Spannungen wie in den Gleichungen (2.9) kann nach [GS92], [Hin75] und [Sta85] nur dann zu befriedigenden Ergebnissen führen, wenn anstelle der skalaren Wirbelviskosität ein Wirbelviskositätstensor vierter Stufe verwendet wird. Der lineare Ansatz wird in dieser Arbeit daher durch einen nichtlinearen Ansatz ersetzt.

Die Modellierung der Korrelationen muß so erfolgen, daß die Definitionsgleichung (2.8) für die Turbulenzenergie erfüllt ist. Da diese Voraussetzung bei einigen Modellierungsvorschlägen nicht erfüllt ist, wurden die Ansätze in dieser Arbeit entsprechend modifiziert.

Weiterhin soll sich mit den Modellierungen der Korrelationen ein System ergeben, dessen Eigenschaften konsistent sind zu einigen allgemeinen Eigenschaften der Navier-Stokesschen Gleichungen. Dies sind die Koordinaten- und Dimensionsinvarianz [Spe87], die Sicherstellung, daß die Gleichungen immer zu physikalisch sinnvollen Werten aller Komponenten des Reynoldsschen Spannungstensors führen (realizability), und die generelle Forderung der Kontinuumsmechanik nach der Unabhängigkeit der Lösung vom Beobachtersystem. Koordinaten- und Dimensionsinvarianz lassen sich durch eine tensorielle Formulierung und Verwendung nur von dimensionslosen Modellkonstanten und -funktionen erreichen und sollten auf jeden Fall befriedigt werden.

Dazu müssen notwendigerweise alle in die Modellierung der Korrelationen eingehenden Koeffizienten Funktionen ausschließlich von invarianten Größen wie \tilde{k} , $\tilde{\varepsilon}$ und Invarianten des Deformationstensors $\underline{\underline{S}}$ (3.1) und des Rotationstensors $\underline{\underline{\Omega}}$ (3.2) sein. Der Einfluß der Tempe-

raturfluktuationen auf die Reynoldsschen Spannungen ist vernachlässigbar [Rub81]. Die Koeffizienten sind dabei Funktionen der Skalierungsparameter \tilde{k} und $\tilde{\varepsilon}$ und der dimensionslosen Invarianten der Tensoren \underline{S} und $\underline{\Omega}$. Im Fall zweidimensionaler Turbulenz (wie beispielsweise der eingelaufenen Strömung in Kanälen) sind nur zwei dieser Invarianten unabhängig und ungleich Null. Sie werden mit η und ξ bezeichnet (Definition und Nomenklatur sind in der Literatur uneinheitlich) und sind durch

$$\eta = \frac{S \cdot \tilde{k}}{\tilde{\varepsilon}} \quad \text{mit} \quad S = (S_{ij}S_{ji})^{1/2} \quad \text{und} \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_l}{\partial x_l} \right) \quad \text{und} \quad (3.1)$$

$$\xi = \frac{\Omega \cdot \tilde{k}}{\tilde{\varepsilon}} \quad \text{mit} \quad \Omega = (-\Omega_{ij}\Omega_{ji})^{1/2} \quad \text{und} \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.2)$$

(in einem nicht rotierenden Bezugssystem) definiert [Pop75], [GS92], [SZL94b]. Im allgemeinen dreidimensionalen Fall sind zusätzlich die drei dimensionslosen Größen

$$\eta_3 = \frac{\tilde{k}}{\tilde{\varepsilon}} (S_{ij}S_{jk}S_{ki})^{1/3}, \quad \eta_4 = \frac{\tilde{k}}{\tilde{\varepsilon}} (S_{ij}\Omega_{jk}\Omega_{ki})^{1/3} \quad \text{und} \quad \eta_5 = \frac{\tilde{k}}{\tilde{\varepsilon}} (S_{ij}S_{jk}\Omega_{kl}\Omega_{li})^{1/4}$$

unabhängige Invarianten der Tensoren \underline{S} und $\underline{\Omega}$.

Die zweite Forderung (realizability) stellt sicher, daß die Modellgleichungen für physikalisch sinnvolle Rand- und Anfangsbedingungen eine Lösung besitzen. Sie ist erfüllt, falls

$$\begin{aligned} \widetilde{v_i'' v_j''} &\geq 0 && \text{für } i = j, \\ \left(\widetilde{v_i'' v_j''} \right)^2 &\leq \widetilde{v_i''^2} \cdot \widetilde{v_j''^2} && \text{für } i \neq j \text{ und} \\ \det(\widetilde{v_i'' v_j''}) &\geq 0 \end{aligned}$$

gilt [Sch77].

Die numerische Lösung vereinfacht sich, wenn die zweite Forderung erfüllt ist, da der Aufwand zur Sicherstellung positiver Werte für Turbulenzenergie und Dissipation entfallen kann, sie wird aber oft nicht oder nur in abgeschwächter Form erfüllt (positive Spur des Reynoldsschen Spannungstensors und damit positive Werte der Turbulenzenergie oder positive Werte für alle Diagonalelemente des Reynoldsschen Spannungstensors).

Manche Autoren behaupten, daß die generelle Forderung der Kontinuumsmechanik nach der Unabhängigkeit der Lösung vom Beobachtersystem nicht zwangsläufig erfüllt sein müsse, da sie von den Navier-Stokesschen Gleichungen nicht erfüllt sei [RB90]. Sie werde deshalb auch von den Turbulenzmodellen, die mit Hilfe der Grundgleichungen abgeleitet sind (siehe Anhang A.4), nicht immer erfüllt.

Explizite nichtlineare Modellierungen

Unter der Annahme, daß die Reynoldsschen Spannungen nur von den Ableitungen der Komponenten der mittleren Geschwindigkeit, der Turbulenzenergie sowie deren Dissipation abhängen, läßt sich eine allgemeingültige nichtlineare konstitutive Gleichung für die Reynoldsschen Spannungen finden, die elf voneinander unabhängige Koeffizienten enthält [GS92], [SL93], [SZL94b], die Funktionen nur von den Invarianten \tilde{k} , $\tilde{\varepsilon}$, η , η_3 , η_4 , η_5 und ξ sind.

Praktisch ist die Berücksichtigung der in den Ableitungen der Geschwindigkeiten linearen und quadratischen Terme ausreichend, insbesondere dann, wenn η aus Gleichung (3.1), also das Verhältnis der charakteristischen Zeit der turbulenten Bewegung zur charakteristischen Zeit der Hauptströmung, klein gegen 1 ist [SL93], [SZL94a]. Die nichtlineare Modellierung der Reynoldsschen Spannungen besitzt dann die in dieser Arbeit verwendete Form

$$\begin{aligned}
 -\widetilde{v_i'' v_j''} = & -\frac{2}{3} \delta_{ij} \tilde{k} + c_\mu \underbrace{\frac{\tilde{k}^2}{\tilde{\varepsilon}} \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_l}{\partial x_l} \right)}_{\text{linearer Anteil}} \\
 & - \underbrace{\frac{\tilde{k}^3}{\tilde{\varepsilon}^2} \left[c_{\tau 1} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_\mu} \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_\mu} + c_{\tau 2} \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_\mu} \frac{\partial \tilde{v}_\mu}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_\mu} \frac{\partial \tilde{v}_\mu}{\partial x_i} \right) + c_{\tau 3} \frac{\partial \tilde{v}_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{v}_\mu}{\partial x_j} \right.} \\
 & \quad \left. - \frac{c_{\tau 1} + c_{\tau 3}}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_\mu}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \tilde{v}_\mu}{\partial x_\lambda} - \frac{2}{3} c_{\tau 2} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_\lambda}{\partial x_\mu} \frac{\partial \tilde{v}_\mu}{\partial x_\lambda} \right]}_{\text{nichtlinearer Anteil}}.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Die in Gleichung (3.3) auftretenden Koeffizienten sind im allgemeinen Funktionen der Invarianten η , η_3 , η_4 , η_5 und ξ [Pop75], [GS92], [SZL94a]. Im zweidimensionalen Fall gilt obiger Ansatz sogar exakt und die Koeffizienten sind nur von η und ξ abhängig [Pop75], [GS92]. In manchen Formulierungen sind die Koeffizienten zusätzlich noch von $\mathcal{P}_k/\tilde{\varepsilon}$ oder den Reynoldsschen Spannungen selbst abhängig und dadurch implizit und numerisch schwieriger zu behandeln. Die auftretenden Koeffizienten lassen sich auf völlig unterschiedliche Weise gewinnen (siehe Anhang A.4.2). Die in Gleichung (3.3) auftretenden nichtlinearen Terme sind für manche Komponenten des Reynoldsschen Spannungstensors von größerer Signifikanz als die linearen Terme [Bak82]. Der oben angegebene nichtlineare Zusammenhang ist damit *nicht* in erster Näherung identisch mit dem Boussinesq-Ansatz.

Eine Einschränkung der Wahl der Koeffizienten ergibt sich aus der generellen Forderung der Kontinuumsmechanik nach der Unabhängigkeit der Lösung vom Beobachtersystem. Daraus folgt nach [RB90] die Forderung $2c_{\tau 2} = c_{\tau 1} + c_{\tau 3}$.

Eine allgemeingültige nichtlineare konstitutive Gleichung für die Geschwindigkeits-Temperatur-Korrelation läßt sich auf ähnliche Weise wie oben für die Reynoldsschen Spannungen beschrieben finden [SL93]. Sie enthält 18 voneinander unabhängige Koeffizienten und kann aus dem gleichen Grund wie bei der allgemeingültigen konstitutiven Gleichung für die Reynoldsschen Spannungen auf die in den Ableitungen der Geschwindigkeiten linearen und quadratischen Terme beschränkt werden.

Der Ansatz

$$-\widetilde{v_i''' T'} = \left(c_{T1} \tilde{k} \delta_{ij} + \frac{\tilde{k}^2}{\tilde{\varepsilon}} \left(c_{T2} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + c_{T3} \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} \right) \right) \frac{\tilde{k}}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} \tag{3.4}$$

kann mit Hilfe des RNG- oder DIA-Formalismus aus den Grundgleichungen abgeleitet werden. Die so bestimmten Koeffizienten sind in Anhang A.4.3 wiedergegeben.

Launder schlägt als nichtlineare konstitutive Gleichung für die Geschwindigkeits-Temperatur-Korrelation die Gleichung

$$-\widetilde{v_i'' T'} = -c_T \widetilde{v_i'' v_j''} \frac{\tilde{k}}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} \quad (3.5)$$

vor [Lau89], wie sie in vergleichbarer Form als Ansatz zur Modellierung diffusiver Terme in differentiellen Reynoldsspannungsmodellen üblich ist. Sie geht für $-\widetilde{v_i'' v_j''} = -\frac{2}{3} \delta_{ij} \tilde{k}$ in den Prandtlschen Ansatz (A.8) über. Wird der Boussinesqsche Ansatz (2.9) für die Reynoldsschen Spannungen eingesetzt, geht sie in die Form (3.4) über und läßt sich bei Verwendung des nichtlinearen Ansatzes (3.3) für die Reynoldsschen Spannungen sogar mit dem auf quadratische Terme beschränkten nichtlinearen Ansatz nach [SL93] identifizieren. Anstelle des linearen Ansatzes für die Geschwindigkeits-Temperatur-Korrelation werden daher die Gleichung (3.4), für die die Koeffizienten bekannt sind, und der allgemeinere Ansatz (3.5) verwendet.

Weitere algebraische Reynoldsspannungsmodelle

Zur Modellierung der Zweierkorrelationen können algebraische Formulierungen der Zweierkorrelationen verwendet werden, die aus den Transportgleichungen für die Komponenten des Reynoldsschen Spannungstensors unter Vernachlässigung oder Modellierung der konvektiven und diffusiven Terme in Form algebraischer Beziehungen gewonnen werden. Die Bedingung lokalen Gleichgewichts von Produktion und Destruktion turbulenter Spannungen ist somit wesentliche Voraussetzung der Gültigkeit algebraischer Reynoldsspannungsmodelle. Die so modifizierten k - ε -Modelle bezeichnet man als algebraische Reynoldsspannungsmodelle [Rod80].

Die Annahmen, die zu algebraischen Ausdrücken für die konvektiven und diffusiven Terme in den Transportgleichungen für die Komponenten des Reynoldsschen Schubspannungstensors führen, mit deren Hilfe die algebraischen Beziehungen aus den Transportgleichungen abgeleitet werden, sind für die meisten turbulenten Scherströmungen nicht gültig [SZL94a]. Zudem übernehmen sie fehlerhafte Modellierungen der Korrelationen höherer Ordnung in den Transportgleichungen, aus denen sie gewonnen werden.

Lokal konvektive Effekte sind nach Taulbee in algebraischen Reynoldsspannungsmodellen durch die Berücksichtigung von Konvektion und zeitlicher Änderung von η und k/ε einschließbar [Tau92]. Ist auch der diffusive Transport der Reynoldsschen Spannungen signifikant, so müssen differentielle Reynoldsspannungsmodelle verwendet werden.

Die meisten algebraischen Reynoldsspannungsmodelle haben die Form impliziter algebraischer Gleichungen für die Komponenten des Reynoldsschen Spannungstensors. Da der bei der Verwendung von Zweigleichungsmodellen mit linearen oder nichtlinearen Modellierungen der Korrelationen erzielbare Rechenzeitvorteil gegenüber differentiellen Reynoldsspannungsmodellen durch numerische Probleme bei der Verwendung von algebraischen Reynoldsspannungsmodellen zum Teil aufgehoben [GS92], [Tau92] wird und eventuell mehrere, darunter

physikalisch sinnlose, Lösungen möglich sind [Gir95], ist eine Entwicklung der impliziten Modellierungen in explizite Form (siehe beispielsweise [RB90], [GS92], [Tau92], [Gir95] und [Gir96]) notwendig.

Der Ansatz für die Reynoldsschen Spannungen besitzt dann wieder die oben angegebene nichtlineare Form (3.3). Solche algebraischen Reynoldsspannungsmodelle in expliziter Form werden daher auch in dieser Arbeit verwendet.

3.1.2. Modifizierte Transportgleichungen

Ein Schwachpunkt des Standard- k - ε -Modells ist neben der Voraussetzung isotroper Turbulenzviskosität die Modellierung der Bilanzgleichung der turbulenten Dissipation.

Die Modellierung der Transportgleichung für $\tilde{\varepsilon}$ kann nach [YOT⁺92] durch Hinzufügen eines zusätzlichen $\tilde{\varepsilon}$ -Produktionsterms verbessert werden. Die vorgeschlagene Modifikation entspricht einer Substitution des Koeffizienten $c_{\varepsilon 1}$ durch

$$c_{\varepsilon 1} - \frac{\sqrt{2} \eta (1 - \eta/\eta_{gl})}{1 + c_{\beta} (\sqrt{2} \eta)^3}. \quad (3.6)$$

Der Gleichgewichtswert η_{gl} ergibt sich mit der für inkompressible Strömungen exakt geltenden Näherung $\mathcal{P}_k/\tilde{\varepsilon} \approx 2 c_{\mu} \eta^2$ und dem Gleichgewichtswert $\mathcal{P}_k/\tilde{\varepsilon} \approx (c_{\varepsilon 2} - 1)/(c_{\varepsilon 1} - 1)$ zu $\eta_{gl} = \sqrt{\frac{c_{\varepsilon 2} - 1}{2 c_{\mu} (c_{\varepsilon 1} - 1)}}$. Die Modifikation verschwindet also im Gleichgewichtsfall, das heißt bei verschwindendem Transport der Reynoldsschen Spannungen. Damit sie auch im Bereich der Gültigkeit des logarithmischen Wandgesetzes ($\mathcal{P}_k/\tilde{\varepsilon} \approx 1$, also $\eta = \eta_w = 1/\sqrt{2 c_{\mu}}$) verschwindet, muß c_{β} mit der oben genannten Bedingung für σ_{ε} aus

$$\kappa^2 = \sqrt{c_{\mu}} \sigma_{\varepsilon} \left(c_{\varepsilon 2} - c_{\varepsilon 1} + \frac{\sqrt{2} \eta (1 - \eta/\eta_{gl})}{1 + c_{\beta} (\sqrt{2} \eta)^3} \right) \quad (3.7)$$

bestimmt werden. In [YOT⁺92] wird für c_{β} ein Bereich von 0.010 bis 0.015 angegeben und der Wert 0.012 empfohlen.

In [SLS⁺94] wird eine neue Gleichung zur Modellierung der Dissipation von Turbulenzenergie vorgeschlagen. Zum einen wird der Koeffizient $c_{\varepsilon 2}$ multipliziert mit

$$\frac{1}{1 + \sqrt{\nu \frac{\tilde{\varepsilon}}{k^2}}} = \frac{1}{1 + \sqrt{c_{\mu} \frac{\nu}{\nu_t}}} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{c_{\mu}}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{\nu}{\nu_t}}}, \quad (3.8)$$

eine Modifikation, die für hohe Werte der Reynolds-Zahl offensichtlich ohne Bedeutung ist, und zum anderen wird der Quellterm der turbulenten Dissipation $c_{\varepsilon 1} \bar{\rho} \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} \mathcal{P}_k$ ersetzt durch $c \sqrt{2} \eta \bar{\rho} \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k}$ mit $c = \max \left\{ 0.43, \frac{\sqrt{2} \eta}{5 + \sqrt{2} \eta} \right\}$.

Die Modifikation des Quellterms geht mit $\mathcal{P}_k/\tilde{\varepsilon} = 2 c_{\mu} \eta^2$ und $c = \sqrt{2} c_{\mu} c_{\varepsilon 1} \eta$ allerdings in die bereits bekannte Form über, so daß die eigentliche in [SLS⁺94] eingeführte Neuerung die

Abhängigkeit des Koeffizienten c beziehungsweise $c_{\varepsilon 1} = c/(\sqrt{2} c_\mu \eta)$ von η ist. Im Gleichgewichtsfall und im Gültigkeitsbereich des logarithmischen Wandgesetzes stimmen der neue Wert des Koeffizienten c und der oben abgeleitete Wert, und damit auch das neue und das herkömmliche Modell, überein.

Beide Modifikationen werden in Kapitel 5 anhand der Ergebnisse bewertet, die mit ihrer Hilfe für die in Abschnitt 2.2.1 beschriebene turbulente Strömung durch einen quadratischen Kanal berechnet werden.

3.2. Lokale partielle Parabolisierung

Lineare und quasilineare partielle Differentialgleichungen können eingeteilt werden in elliptische, hyperbolische und parabolische partielle Differentialgleichungen. Der Typ der Gleichungen ist für die Strömungsberechnung wesentlich; partielle Differentialgleichungen können in der Richtung, in der sie parabolischen Charakter besitzen, fortschreitend gelöst werden, da keine Wirkung in die entgegengesetzte Koordinatenrichtung vorkommt. Dadurch vermindert sich der Lösungsaufwand beispielsweise eines dreidimensionalen Problems auf nahezu den Aufwand eines ähnlichen zweidimensionalen Problems. So sind zum Beispiel die strömungsmechanischen partiellen Differentialgleichungen oder die instationäre Wärmeleitungsgleichung parabolisch (in der Zeit) und können daher Schritt für Schritt in der Zeit fortschreitend berechnet werden.

Wie der Typ von partiellen Differentialgleichungen und von Systemen partieller Differentialgleichungen bestimmt werden kann und was unter linearen und quasilinearen partiellen Differentialgleichungen und Differentialgleichungssystemen zu verstehen ist, wird beispielsweise in [CH68] und [Fle91a] beschrieben. Die Bestimmung des Typs der partiellen Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme erfolgte im Rahmen dieser Arbeit nach folgender Methode: die charakteristischen Formen werden nach der in [CH68] wiedergegebenen Methode bestimmt und besitzen daher reelle Koeffizienten. Die Lösungen des charakteristischen Polynoms werden für jede Koordinatenrichtung getrennt untersucht, so daß sich wie in [Fle91a] der Differentialgleichungstyp in Abhängigkeit von der Koordinatenrichtung ergibt. Beispiele für die Anwendung des Verfahrens werden in [Spe99] gegeben.

Es zeigt sich, daß alle in dieser Arbeit verwendeten Differentialgleichungen in ihrer allgemeinen Form zumindest über die temperatur- und druckabhängigen Stoffwerte nur quasilinear sind. Für konstante Stoffwerte ist in der Impulsbilanz zudem der konvektive Term und bei Anwendung nichtlinearer Modellierungen der Reynoldsschen Spannungen auch der turbulente Diffusionsterm nichtlinear in den Geschwindigkeitskomponenten. In der Gleichung für \tilde{k} sind der Produktionsterm und der Term der turbulenten Diffusion nichtlinear in \tilde{k} und in der für $\tilde{\varepsilon}$ sind die Terme, durch die Produktion und Dissipation von $\tilde{\varepsilon}$ modelliert werden, und ebenfalls der Term der turbulenten Diffusion nichtlinear in $\tilde{\varepsilon}$. Die Temperaturgleichung schließlich ist unter Annahme konstanter Stoffwerte linear in \bar{T} . Die ohne Kenntnis des Lösungsverhaltens durchgeführte Bestimmung der dominanten Nichtlinearitäten in den

Gleichungen zeigt bereits die Terme auf, die auch bei der numerischen Lösung die größten Probleme aufwerfen.

Eine Analyse des Systems partieller Differentialgleichungen nach der in [Spe99] dargestellten Methode führt zu dem Ergebnis, daß das Gleichungssystem parabolisch in der Zeit und elliptisch in allen Ortskoordinaten ist. Da in dieser Arbeit stationäre Strömungen untersucht werden, gilt dem Typ in den Ortskoordinaten besonderes Interesse. Bei den hier betrachteten Zwangskonvektionsströmungen ist, außer im Bereich von Rezirkulationen, der konvektive Term in Strömungsrichtung in der Impulsbilanz sowie in den Gleichungen für \tilde{k} , $\tilde{\varepsilon}$ und \bar{T} groß gegen die Diffusionsterme in Strömungsrichtung, so daß diese vernachlässigbar sind. Da die Krümmung der Feldvariablen transversal zur Hauptströmungsrichtung größer ist als in Hauptströmungsrichtung, können die diffusiven Terme in Strömungsrichtung auch gegen die entsprechenden transversalen Terme vernachlässigt werden. Dadurch werden die entsprechenden Gleichungen in der lokalen Strömungsrichtung parabolisch, wenn man sie isoliert betrachtet [Spe99].

Für die Energieerhaltungsgleichung in Temperaturform bedeutet die Parabolisierung anschaulich die Vernachlässigung der Wärmeleitung in Hauptströmungsrichtung. Diese Annahme ist nach [Jis82] für Péclet-Zahlen $Pé \gg 1$ (siehe Abschnitt 3.5) und nach [SB87] für $Pé > 10$ gerechtfertigt.

Werden die diffusiven Terme in Bezug auf die lokale Hauptströmungsrichtung und nicht global für eine Raumrichtung parabolisiert, so entfällt die in [Fle91b, Kapitel 16] genannte und für viele Innenströmungen wesentliche Einschränkung, daß die Hauptströmungsrichtung im betrachteten Bereich mit einer Koordinatenrichtung zusammenfallen muß. Daher wurde im Rahmen dieser Arbeit für die partielle Parabolisierung der im folgenden beschriebene, für lokale und globale partielle Parabolisierung einheitliche Formalismus entwickelt.

Bei globaler Parabolisierung beispielsweise in x_3 -Richtung sind alle Terme der diffusiven Tensoren oder Flußdichten, deren Divergenz in den Erhaltungsgleichungen auftritt, beispielsweise $\left(\underline{\underline{\sigma_d}}\right)_{ij}$ aus Gleichung (B.9) und \dot{q}_i mit $j = 3$ zu Null zu setzen.

Zur lokalen Parabolisierung müssen die entsprechenden Tensoren und Flußdichten erst in ein Koordinatensystem transformiert werden, in dem die Richtung, in der die Parabolisierung stattfinden soll (im allgemeinen die lokale Strömungsrichtung), parallel beispielsweise zur x_3 -Richtung liegt. Von dem transformierten Tensor sind dann wie oben alle Komponenten mit $j = 3$ zu Null zu setzen und der Tensor zurückzutransformieren. Geschieht der Übergang durch einfache Drehung des kartesischen Koordinatensystems, so kann der Vorgang der lokalen Parabolisierung durch die Transformationsvorschriften

$$\left(\underline{\underline{\sigma_d^p}}\right)_{ij} = \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^2 Q_{ri} Q_{sj} \sum_{t,u=1}^3 Q_{rt} Q_{su} \left(\underline{\underline{\sigma_d}}\right)_{tu} \quad \text{und} \quad \dot{q}_i^p = \sum_{r=1}^2 Q_{ri} \sum_{s=1}^3 Q_{rs} \dot{q}_s \quad (3.9)$$

mit einer orthogonalen Drehmatrix $\underline{\underline{Q}}$ beschrieben werden. Die in den Gleichungen (B.7) und (B.8) bestimmten isotropen und konvektiven Anteile der Tensoren der Impulsbilanz dürfen nicht durch die Transformation verändert werden.

Beschreibt der Normalenvektor \underline{n} die Richtung, in der parabolisiert werden soll, so lautet die Drehmatrix

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & 0 \\ \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 \\ \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 & \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

mit $\sin \alpha_1 = n_1/(n_1^2 + n_2^2)^{1/2}$ und $\cos \alpha_1 = n_2/(n_1^2 + n_2^2)^{1/2}$ ($\sin \alpha_1 = 0$ und $\cos \alpha_1 = 1$ für $n_1 = n_2 = 0$), $\cos \alpha_2 = n_3$ und $\sin \alpha_2 = (1 - n_3^2)^{1/2}$. Sie ergibt sich aus der Kombination einer Drehung um die x_3 -Achse so, daß der Normalenvektor in die (x_2, x_3) -Ebene transformiert wird und einen positiven Anteil in x_2 -Richtung aufweist, und einer Drehung um die x_1 -Achse so, daß \underline{n} auf den Einheitsvektor in x_3 -Richtung zu liegen kommt (für $\underline{n} = \underline{e}_z$ geht die Transformationsmatrix in die Einheitsmatrix über). Ist die Richtung, in der parabolisiert werden soll, im gesamten Strömungsgebiet gleich, so ist die Transformationsmatrix ortsunabhängig (globale partielle Parabolisierung), andernfalls ist sie eine Funktion des Ortes (lokale partielle Parabolisierung).

Die Transformationsvorschrift (3.9) für die diffusiven Flußdichten ist äquivalent zur anschaulich sofort plausiblen Transformation $\underline{\underline{q}}^p = \underline{\underline{q}} - (\underline{\underline{q}}\underline{\underline{n}})\underline{n}$. Auch die Transformationsvorschrift für den Spannungstensor läßt sich anschaulich deuten. Wegen $\sum_{r=1}^3 Q_{ri}Q_{rt} = \sum_{r=1}^3 Q_{ir}^{-1}Q_{rt} = \delta_{it}$ folgt aus Gleichung (3.9) $(\underline{\underline{\sigma}}^p)_{ij} = \sum_{s=1}^2 Q_{sj} \sum_{u=1}^3 Q_{su} (\underline{\underline{\sigma}}_d)_{iu}$, die Zeilenvektoren des Spannungstensors transformieren sich also genauso wie Vektoren.

Die entkoppelte Betrachtung der einzelnen Gleichungen scheint vom Lösungsaufwand her vorteilhaft, da manche Gleichungen für sich betrachtet parabolisiert werden können. Dazu ist zum einen die Stärke der Kopplung zu untersuchen und zum anderen eine geeignete Gleichung zu suchen, die den elliptischen Charakter des gesamten Differentialgleichungssystems erhält.

Bei starker Kopplung der Gleichungen ist eine getrennte Betrachtung der Differentialgleichungen je nach Art der Nichtlinearitäten und Größe der resultierenden algebraischen Gleichungssysteme eventuell nicht sinnvoll, da der Rechenzeitvorteil, der sich bei getrennter Gleichungslösung ergibt, durch eine bei starker Kopplung notwendige hohe Zahl von Picarditerationen über die einzelnen Gleichungen aufgehoben wird und zusätzlich Stabilitätsprobleme bei dem iterativen Vorgehen auftreten können.

Ein fluktuierendes Geschwindigkeitsfeld beeinflusst im allgemeinen ein skalares Feld wie das der inneren Energie, der Temperatur oder der Konzentration eines gelösten Stoffes. Die Rückwirkungen von Fluktuationen im skalaren Feld auf das Geschwindigkeitsfeld sind dagegen meist schwach oder ganz vernachlässigbar [Bra78]. Daher ist eine getrennte Betrachtung der Temperaturgleichung, die bei konstanten Stoffwerten ohne Iteration vorgenommen werden kann, da sie ohne Rückwirkung auf die anderen Gleichungen ist, auch für den Fall temperatur- und druckabhängiger Stoffwerte zur Verminderung des Rechenaufwands geboten. Die Gleichungen für \tilde{k} und $\tilde{\varepsilon}$ sind zwar stärker aneinander und auch mit den Bilanzgleichungen für Impuls und Masse gekoppelt, ihre getrennte Lösung führt aber im allgemeinen dennoch zu einer Verminderung des Rechenaufwands [Smi84].

In dieser Arbeit werden alle Differentialgleichungen des Differentialgleichungssystems getrennt betrachtet, wodurch die Anwendung der Parabolisierung einfacher und der Speicherplatzbedarf des Simulationsverfahrens gegenüber einer gekoppelten Betrachtung deutlich reduziert wird.

3.2.1. Randbedingungen

Liegt der Normalenvektor eines Randes parallel zur Richtung in der parabolisiert wird, verschwinden die entsprechenden Oberflächenintegrale über den Auslaßrändern in der schwachen Formulierung der Differentialgleichungen (siehe Kapitel 4), so wie es bei Betrachtung der Charakteristiken der entsprechenden Differentialgleichungen bei (partieller) Parabolisierung zu erwarten ist. Das bedeutet, daß für die parabolisierten Gleichungen im Gegensatz zu den elliptischen Gleichungen an den Ausströmrändern keine Randbedingungen gestellt werden dürfen.

Durch die komplizierte Kopplung der Gleichungen und die nichtlinearen Terme ist die Frage nach den Randbedingungen für ein korrekt gestelltes Problem schwierig zu beantworten [Fer87]. Da in dieser Arbeit ausschließlich stationäre Strömungen berechnet werden, umfassen die folgenden Betrachtungen die Randbedingungen ausschließlich für die stationären Gleichungen.

Allgemein unterscheidet man drei Typen von Randbedingungen, die an eine Funktion auf Randstücken gestellt werden können:

- Die Dirichlet-Bedingung $f = \phi_d$ (Vorgabe des Funktionswertes),
- die Neumann-Bedingung $\partial f / \partial n = \phi_n$ (Vorgabe der Normalenableitung) und
- die Cauchy- oder Robin-Bedingung $\partial f / \partial n + \phi_{r1} f = \phi_{r2}$ (gemischte Randbedingung),

wobei ϕ_d , ϕ_n , ϕ_{r1} und ϕ_{r2} vorgegebene Funktionen auf den betreffenden Randteilen sind.

Während die Frage nach den Randbedingungen für \tilde{k} , $\tilde{\varepsilon}$ und \bar{T} in der Regel isoliert für die zugehörigen Differentialgleichungen beantwortet wird, sind die Randbedingungen für Druck und Geschwindigkeit nur aus der Betrachtung des Systems aus Kontinuitäts- und Impulsbilanzgleichung zu gewinnen. Anhand der im Anhang B.2 beschriebenen schwachen integralen Formulierung der Differentialgleichungen ist zu sehen, daß zur Berechnung der auftretenden Oberflächenintegrale die Vorgabe der drei Spannungskomponenten $\underline{\underline{\sigma}} \underline{n}$ mit dem Normalenvektor \underline{n} und dem Spannungstensor

$$\sigma_{ij} = -\bar{p} \delta_{ij} + \bar{\rho} \tilde{v} \left(\frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \frac{\partial \tilde{v}_l}{\partial x_l} \right) - \bar{\rho} \widetilde{v_j'' v_k''}$$

notwendig ist, falls nicht die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten vorgegeben werden.

Mögliche Randbedingungen sind daher

- die Vorgabe des Geschwindigkeitsvektors $\underline{\tilde{v}}$,
- die Vorgabe der Geschwindigkeitskomponente in Oberflächennormalenrichtung sowie der beiden Tangentialkomponenten von $\underline{\underline{\sigma}} \underline{n}$,
- die Vorgabe der Komponente von $\underline{\underline{\sigma}} \underline{n}$ in Oberflächennormalenrichtung $\sigma_n = (\underline{\underline{\sigma}} \underline{n}) \underline{n}$ sowie der beiden Tangentialkomponenten des Geschwindigkeitsvektors und
- die Vorgabe der Spannungskomponenten $\underline{\underline{\sigma}} \underline{n}$.

Eine entsprechende Betrachtung für die nichtgemittelten Gleichungen wird beispielsweise in [Seg85] vorgenommen.

Anstelle des Spannungstensors $\underline{\underline{\sigma}}$ kann, bei geänderter partieller Integration der Differentialgleichungen in der schwachen Formulierung (siehe Anhang B.2), auch der entsprechende spurfreie Tensor $\underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) I_3$ in den Oberflächenintegralen auftreten. Damit ändern sich die Randbedingungen für $\sigma_n = (\underline{\underline{\sigma}} \underline{n}) \underline{n}$. Am Austritt ist dann scheinbar keine Druckvorgabe mehr notwendig. In der Galerkinschen Formulierung der Differentialgleichungen ist der Druck am Austritt aber trotzdem notwendig, da die Gewichtsfunktionen für das Residuum der Kontinuitätsgleichung die Ansatzfunktionen des Drucks sind und damit die Vorgabe des Drucks am Austritt zur Bestimmung der Gewichtsfunktionen notwendig ist [Fle91b]; die an das Gesamtsystem zu stellenden Randbedingungen werden also durch die Änderung der Gleichungsdiskretisierung nicht beeinflusst.

Eintrittsrandbedingungen

Am Eintritt sind unabhängig vom Typ der Differentialgleichungen Randbedingungen für die drei Komponenten von $\underline{\underline{\sigma}} \underline{n}$ beziehungsweise die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten, \tilde{k} , $\tilde{\varepsilon}$ und \overline{T} vorzugeben. In dieser Arbeit werden Dirichlet-Randbedingungen für den Geschwindigkeitsvektor, die Turbulenzenergie, die Dissipation der Turbulenzenergie und die Temperatur vorgegeben.

Sind die genauen Eintrittsrandbedingungen für \tilde{k} und $\tilde{\varepsilon}$ nicht bekannt, so behilft man sich mit der Vorgabe eines konstanten Wertes für die Turbulenzenergie, der aus einem durch $\text{Tu}_n = \sqrt{\widetilde{v_z'^2}} / \tilde{v}_n$ definierten, vorzugebenden Turbulenzgrad mittels

$$\tilde{k}_{\text{ein}} = \frac{3}{2} \text{Tu}_n^2 \tilde{v}_n^2$$

berechnet wird. Werte des Turbulenzgrades hängen von der betrachteten Strömung ab (etwa 4 % für zurückspringende Stufen, wie sie in [Nal87] berechnet werden; 6 % für Rohrströmungen in [MP89]; 5 bis 10 % für Brenner [Ben88a]).

Der für die Dissipation von Turbulenzenergie vorzugebende Wert kann mittels des Wertes der Turbulenzenergie und einer vorzugebenden Mischungslänge l_m durch

$$\tilde{\varepsilon}_{\text{ein}} = c_\mu \frac{\tilde{k}_{\text{ein}}^{3/2}}{l_m}$$

berechnet werden [Ben88a], [Nal87], [AF89]. Wenn kein angepaßtes Mischungsweglängenmodell zur Verfügung steht, wird ein konstanter Wert für die Mischungslänge eingesetzt [AF89]. Der aus der Angabe ungenauer Werte der Dirichlet-Randbedingungen für \tilde{k} und $\tilde{\varepsilon}$ resultierende Fehler ist umso kleiner, je größer die Turbulenzenergieproduktion ist.

Für die in dieser Arbeit herangezogenen Experimente sind das Geschwindigkeits- und Turbulenzenergiefeld gemessen worden. Es wird eine über den Querschnitt konstante Geschwindigkeit, ein konstanter Turbulenzgrad und, da stromaufwärts des Eintritts keine Beheizung stattfindet, auch eine über den Querschnitt konstante Temperatur vorgegeben.

Nach [SRY78] und [GS87] muß die Eintrittsrandbedingung für den Druck bei Verwendung einer Druckpoissonsgleichung aus den Impulsbilanzgleichungen gewonnen werden. Im Anhang B.2 wird jedoch gezeigt, daß eine Vorgabe von Druckeintrittsrandbedingungen bei Verwendung einer Druckpoissonsgleichung nicht erforderlich ist.

Ausflußrandbedingungen

Oftmals werden verschwindende Spannungen $\underline{\sigma}_n$ und verschwindende Normalenableitungen oder Flußdichten für alle Feldgrößen außer dem Druck am Strömungsaustritt gefordert [Smi84], [HSH87], [Utn88], [AF89]. Bei Kanalströmungen darf nie eine verschwindende Normalenableitung des Drucks gefordert werden, da sie wegen des von Null verschiedenen Druckverlustes phänomenologisch falsch ist. Auch die Forderung einer verschwindenden Normalenableitung der Temperatur ist bei beheizten Strömungen unrealistisch; als Randbedingung für die Energiebilanz in der Temperaturform muß die Wärmestromdichte normal zum Ausfluß vorgegeben werden.

Ist die Strömung eingelaufen, d. h. ändern sich das Geschwindigkeits- und Turbulenzenergiefeld und der Druckgradient stromabwärts nicht mehr, so *dürfen* aufgrund des Typs der Differentialgleichungen nur Randbedingungen für den Druck am Austritt vorgegeben werden. Bei nicht voll entwickelter Strömung sind die vorzugebenden Randbedingungen im allgemeinen unklar [Fer87], [PME92]. In diesem Fall lassen sich die besten Ergebnisse mit freien Randbedingungen (nach [PME92]) oder mittels solcher Randbedingungen erzielen, die das Strömungsfeld möglichst wenig beeinflussen (also keine Dirichlet-Randbedingungen [PME92]).

Bei Verwendung des elliptischen Gleichungssystems werden daher meist verschwindende Normalenableitungen für die Tangentialkomponenten von \tilde{k} , $\tilde{\varepsilon}$ und \bar{T} vorgegeben, obwohl strenggenommen wegen der in den turbulenten Spannungen vorkommenden Turbulenzviskosität auch \tilde{k} und $\tilde{\varepsilon}$ und bei temperaturabhängigen Stoffwerten sogar die Temperatur am Austritt vorzugeben ist. Die Normalenkomponente der Spannung σ_n ist praktisch identisch mit dem Druck am Austritt; die am Austritt vorzugebenden Werte der Tangentialkomponenten von $\underline{\sigma}_n$ sind im allgemeinen nicht bekannt. Die Vorgabe inkorrektur Austrittsrandbedingungen kann jedoch die Lösung des Differentialgleichungssystems erschweren oder verhindern, da keine reale Lösung für die gegebenen Randbedingungen existiert (inkorrekt gestelltes Problem).

Aus den genannten Gründen ist die Beschreibung einer konvektionsdominierten Strömung mit parabolischen Gleichungen für Impuls, Turbulenzenergie, deren Dissipation und der Temperatur sinnvoller als die Beschreibung mit elliptischen Gleichungen, insbesondere wenn keine exakt zueinander passenden Ein- und Austrittsrandbedingungen von vornherein bekannt sind.

Für die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten partiell parabolischen Gleichungen wird wie im elliptischen Fall der Druck am Austritt vorgegeben. Weitere Ausflußrandbedingungen sind dann nicht erforderlich.

Wandrandbedingungen

Die an Wänden zu stellenden Randbedingungen wurden bereits in Abschnitt 2.1.3 beschrieben und ändern sich durch eine Parabolisierung nicht. In dieser Arbeit wird zusätzlich eine eindimensionale Modellierung des wandnahen Bereichs verwendet (siehe Abschnitt 3.4).

Symmetrierandbedingungen

Die an Symmetrierändern zu stellenden Randbedingungen werden ebenfalls nicht durch eine Parabolisierung beeinflusst. Für die Impulsbilanzgleichungen werden neben einer verschwindenden Normalenkomponente der mittleren Geschwindigkeit auch verschwindende Tangentialkomponenten von $\underline{\underline{\sigma}} \underline{n}$ vorgegeben [Smi84]. Die Randbedingungen verschwindender Spannungstangentialkomponenten und einer verschwindenden Normalenkomponente der mittleren Geschwindigkeit sind äquivalent zur Forderung einer verschwindenden Normalenkomponente der mittleren Geschwindigkeit und einem Verschwinden der Normalenableitungen der Tangentialkomponenten des Vektors der mittleren Geschwindigkeit.

Wie für die Wandrandbedingungen ergibt sich auch für die Symmetrierandbedingungen das Problem, daß sie in der Regel nicht direkt angewendet werden können. Die Forderung einer verschwindenden Normalenkomponente der mittleren Geschwindigkeit wird daher wie bei den Wandrandbedingungen umgeformt (siehe Gleichung (2.12)). Für den Spannungsvektor an Symmetrierändern gilt $\underline{\underline{\sigma}} \underline{n} = \sigma_n \underline{n}$, wobei $\sigma_n = (\underline{\underline{\sigma}} \underline{n}) \underline{n}$ aus der Lösung des vorhergehenden Iterationsschritts berechnet wird. Zusätzlich zu der Dirichlet-Bedingung für eine Geschwindigkeitskomponente werden damit für die verbleibenden Komponenten der Impulsbilanz die Spannungen $(\underline{\underline{\sigma}} \underline{n}) \underline{e}_j = n_j \sigma_n$ vorgegeben.

Für \tilde{k} , $\tilde{\varepsilon}$, \overline{T} und \overline{p} ist an Symmetriefflächen das Verschwinden der Normalenableitung zu fordern. In dieser Arbeit werden äquivalent dazu verschwindende Flußdichten der entsprechenden Größen gefordert. Für den Druck werden bei Verwendung der Druckpoissonsgleichung verschwindende Neumann-Bedingungen gefordert.

3.3. Druck-Geschwindigkeits-Kopplung

Das System der Bilanzgleichungen für Impuls und Masse ist stark gekoppelt; ein gutes Druckfeld ist für die korrekte Berechnung des Geschwindigkeitsfelds unabdingbar [PFC89]. Eine entkoppelte Berechnung von Druck- und Geschwindigkeitsfeld führt nach Untersuchungen von Benim [Ben88a] dennoch zu einer Verringerung nicht nur des Speicherbedarfs, sondern auch der aufzuwendenden Rechenzeit und wird daher in dieser Arbeit vorgenommen.

Das System aus den vier Differentialgleichungen, die die drei Geschwindigkeitskomponenten und den Druck bestimmen, ist auch dann noch elliptisch, wenn die Anteile der Diffusionsterme in Strömungsrichtung vernachlässigt werden. Einen Ausweg, der die partielle Parabolisierung der Impulsbilanz ermöglicht, bietet die Verwendung der Poissongleichung für den Druck, die durch Divergenzbildung der vektoriellen Impulsbilanz erhalten wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} p_{\text{eff}} = & -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho} \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho} \tilde{v}_k \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_k} \right) + g_j \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j} \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left(\bar{\rho} \tilde{v} \left(\frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \frac{\partial \tilde{v}_l}{\partial x_l} \right) - \bar{\rho} \left(\widetilde{v_j'' v_k''} - \frac{2}{3} \delta_{jk} k \right) \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

In Gleichung (3.11) tritt anstelle des hydrostatischen Drucks p im turbulenten Fall die Summe aus hydrostatischem und turbulentem Druck $p_{\text{eff}} = p + 2 \rho k/3$ auf.

Eine Äquivalenz der Differentialgleichungssysteme aus Impuls- und Massenbilanzgleichungen zu dem System aus Druckpoissongleichung und der Impulsbilanzgleichung wird in [GS87] und [AD88] bei korrekt gewählten Randbedingungen theoretisch nachgewiesen und auf numerischem Weg bestätigt.

Die Geschwindigkeitskomponenten werden in dieser Arbeit mittels der parabolisierten Impulsbilanzgleichung bestimmt und das Druckfeld über die elliptische Differentialgleichung, so daß weiterhin der elliptische Charakter des gesamten Differentialgleichungssystems garantiert ist. Auch phänomenologisch liegt das beschriebene Vorgehen auf der Hand: bei starker Konvektion gibt es keine erkennbare Wirkung entgegen der Strömungsrichtung (beispielsweise durch Diffusion) außer der Rückwirkung durch das Druckfeld. Selbst bei Auftreten von kleinen Rezirkulationsbereichen sind unter Annahme einer festen Hauptströmungsrichtung partiell parabolisierte Gleichungen mit Erfolg angewendet worden [CK89], [GGRK81], [Rhi85]. Dabei ist im Vergleich zur Verwendung der elliptischen Gleichungen keine sichtbare Veränderung der Feldgrößen zu beobachten; es verlangsamt sich aber mit Auftreten von Rezirkulationen die Konvergenzgeschwindigkeit des numerischen Verfahrens [GGRK81], [SRY78].

Macht die Größe der Rezirkulationsbereiche eine Verwendung des elliptischen Gleichungssystems notwendig, so läßt sich im Vergleich zu elliptischen Berechnungen des gesamten Strömungsfelds Rechenzeit sparen, wenn nur die elliptischen Bereiche innerhalb der (partiell) parabolischen Strömung unter Verwendung des elliptischen Gleichungssystems berechnet werden [Pol79]. Ein optimales Verfahren zur Berechnung allgemeiner Strömungen wird daher dem lokalen Charakter der Strömung Rechnung tragen müssen, indem es an den lokal

wechselnden Typ der zugrundeliegenden Differentialgleichungen angepaßte Berechnungsverfahren verwendet. Die untersuchten Strömungen erlauben eine durchgehende partielle Parabolisierung.

Die Gleichung (3.30) hat in ihrer schwachen Formulierung, die zur Bestimmung der für das Differentialgleichungssystem erforderlichen Druckrandbedingungen für ein korrekt gestelltes Problem verwendet werden kann, eine sehr interessante Eigenschaft: dadurch, daß alle Randintegrale wegen der Impulsbilanzgleichungen verschwinden (siehe Anhang B.2), sind bei dem zum System aus Kontinuitäts- und Impulsbilanzgleichungen äquivalenten System keine Neumann-Randbedingungen vorzugeben. Das heißt, daß für den Druck nur Dirichlet-Randbedingungen vorzugeben sind (in der Regel der Druck am Kanalaustritt), und daß die bei anderen Formen der Druckgleichung auftretenden Neumann-Bedingungen nicht vorzugeben, sondern aus der Lösung des vorhergehenden Iterationsschritts zu bestimmen sind.

Die Poissongleichung (3.11) zur Bestimmung des Druckfelds enthält dritte Ableitungen der Geschwindigkeit und ist deshalb nicht unter Verwendung von C^0 -konformen Elementen mit der Methode der finiten Elemente lösbar. Daher werden nur die Anteile der zweiten Zeile der Gleichung (3.11) C^0 -konform diskretisiert, bei denen dies möglich ist. Die dabei getroffenen Näherungen, also die Vernachlässigung der dritten Ableitungen der Geschwindigkeiten, bewirken allerdings, daß die Kontinuitätsgleichung durch das gekoppelte System aus Druck- und Impulsbilanzgleichungen nicht mehr erfüllt wird.

Als Ausweg zeigt sich, daß die Addition der mit einem Faktor versehenen Kontinuitätsgleichung zur rechten Seite der Druckgleichung den Druck gerade so korrigiert, daß das gekoppelte System die Kontinuität wieder erfüllt. Der Faktor muß negativ sein, da so eine Massenstromquelle zu einer verstärkt negativen Krümmung im Druckfeld und eine Massenstromsenke zu einer verstärkt positiven Krümmung im Druckfeld führt. Im Fall eines unbegrenzt wachsenden Faktors ist natürlich die Kontinuität exakt erfüllt. Formal besitzt die Druckgleichung durch die Korrektur Ähnlichkeit mit den diskretisierten Gleichungen nach den SIMPLE-Verfahren, die Ableitung konnte jedoch ohne Näherungen auf Basis der diskretisierten Gleichungen erfolgen, so daß die getroffenen Näherungen bekannt und überprüfbar sind. Die in den Kapiteln 4 und 5 gezeigten Rechnungen mit der so modifizierten Druckgleichung bestätigen die Gültigkeit der vorgenommenen Näherungen.

Sehr große Werte des Faktors können zu Beginn der Picarditerationen zur Instabilität des Verfahrens führen. Bei der Berechnung laminarer Strömungen wird der Faktor zu Beginn zu Null oder einem vom Betrag her kleinen Wert gesetzt und im Laufe der Iterationen dem Betrag nach erhöht. Als Kriterium zur Wahl des Faktors wird dabei das Verhältnis der Norm der rechten Seite des sich ohne Korrektur ergebenden Gleichungssystems zur Norm des durch die Korrektur bewirkten Anteils der rechten Seite verwendet. Bei der Berechnung turbulenter Strömungen erwies sich die Verwendung eines konstanten Faktors der Größe 1 als ausreichend.

Neben der vorgestellten Methode der Druckpoissongleichung werden in der Literatur weitere Verfahren angewendet, die oft (zumindest in diskretisierter Form) äquivalent zu einer modifizierten Poissongleichung für den Druck sind [FP96, Kapitel 7]. Sie lassen sich grob in zwei

Gruppen einteilen: Zu der einen Gruppe gehören die Methoden, für die eine Differentialgleichung zur Druckbestimmung angegeben wird. Dazu gehören die Methode der künstlichen Kompressibilität [Sch90], bei der die Gleichung

$$\frac{1}{\beta_k} \frac{\partial p}{\partial t_v} + \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.12)$$

mit der künstlichen Kompressibilität β_k und der virtuellen Zeit t_v oder nach [Fle91b] die Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + v_k^2 \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.13)$$

mit der künstlichen Geschwindigkeit v_k anstelle der Druckpoissongleichung gelöst wird, und die Penaltymethode, bei der die Gleichung

$$p = -\lambda_p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (3.14)$$

mit dem Penaltyparameter λ_p für $\lambda_p \rightarrow \infty$ anstelle der Druckpoissongleichung gelöst wird [RRRA93]. Von Unstimmigkeiten der Einheiten in einigen der angegebenen Veröffentlichungen abgesehen haben die Methoden dieser ersten Gruppe den Nachteil, daß sie entweder zur Instabilität oder zu physikalisch unsinnigen Druckverteilungen neigen (sogenanntes 'checkerboarding', das sich auch in dieser Arbeit bei dem Versuch, Verfahren der künstlichen Kompressibilität anzuwenden, selbst bei verringerter Ordnung der numerischen Integration für den Druck als Hauptproblem erwies), und daß für die Penaltymethode die Äquivalenz der Zielgleichungen zu den Ausgangsgleichungen lediglich für Strömungen ohne Dichteänderungen nachgewiesen ist [Ben88a]. Die Penaltymethode führt zudem auf schlecht konditionierte algebraische Gleichungssysteme, die ohne weitere Modifikation mit iterativen Verfahren nicht mehr lösbar sind [RRRA93].

Zur zweiten Gruppe kann man die vielen Verfahren zählen, die auf das SIMPLE-Verfahren von Patankar und Spalding [PS72] zurückgehen. Alle Verfahren dieser Gruppe verwenden Druckgleichungen auf Basis der diskretisierten Gleichungen (siehe beispielsweise [Ben88a], [LP85], [FP96], [Sch86] und [Sch90]), wodurch sich zum Teil sogar der Typ des Differentialgleichungssystems ändert [Ben88a, Seite 56], ohne daß die den getroffenen Näherungen zugrundeliegenden physikalischen Annahmen oder die tatsächlich gelöste Differentialgleichung des Drucks bekannt sind. Wesentliches Ausschlußkriterium für die SIMPLE-Verfahren ist das in dieser Arbeit verfolgte Ziel, die Gleichungen zur Bestimmung des Druck- und Geschwindigkeitsfelds getrennt aufzubauen; die SIMPLE-Verfahren verwenden aber die diskretisierten Impulsbilanzgleichungen zum Aufbau der diskretisierten Druckgleichung.

In dieser Arbeit wurden zwei weitere Verfahren getestet, die beide zur ersten Gruppe der Druckgleichungen zu zählen sind, sich aber dadurch auszeichnen, daß sie exakt sind und bei Konvergenz die Einhaltung der Kontinuität sowohl im Fall konstanter als auch im Fall variabler Stoffwerte sicherstellen.

Dies ist zum einen ein Verfahren, das, da die Dichte eine Funktion von Druck und Temperatur ist, mit $\partial\rho/\partial x_i = (\partial\rho/\partial p)_T \partial p/\partial x_i + (\partial\rho/\partial T)_p \partial T/\partial x_i$ direkt aus der Kontinuitätsgleichung gewonnen wird:

$$\left. \frac{\partial\rho}{\partial p} \right|_T \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + \left. \frac{\partial\rho}{\partial T} \right|_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = 0. \quad (3.15)$$

Es gilt $(\partial\rho/\partial p)_T = 1/v_{\text{schall}}^2$. Die finite Elemente Gleichungen zeigen, daß – physikalisch korrekt – keine Neumann-Randbedingungen, sondern ausschließlich Dirichletrandbedingungen an den Druck zu stellen sind. Die aus diesem Verfahren resultierenden algebraischen Gleichungen ließen sich erst nach einer Symmetrisierung befriedigend mit iterativen Gleichungslösern behandeln. Das Verfahren neigte aber wie die Methode der künstlichen Kompressibilität zu unphysikalischen Druckfeldern und damit zur Divergenz.

Als weiteres Verfahren wurde ein Druckkorrekturverfahren für die Berechnung stationärer Strömungen entwickelt, bei dem die Druckkorrektur proportional zur Massenquellendichte gesetzt wird:

$$p_{\text{kor}} \sim - \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i}. \quad (3.16)$$

Bei einer Massenquelle wird der Druck somit solange gesenkt, bis die Quelle verschwindet und umgekehrt wird bei einer Massensenke der Druck solange erhöht, bis die Senke verschwindet. Zur Bestimmung der Druckkorrektur sind wiederum keine Neumann-Randbedingungen vorzugeben, sondern es ist lediglich das Verschwinden der Korrektur an einem Punkt oder das Verschwinden der mittleren Druckkorrektur über einen Randbereich wie beispielsweise den Auslaß zu fordern. Dieses Verfahren erwies sich für die nichtlinearen Modelle als sehr hilfreich, konvergiert aber langsamer als die Berechnung mit Hilfe der Druckpoissongleichung.

3.4. Modellierung des wandnahen Bereichs

Müssen aus in Abschnitt 2.1.3 genannten Gründen die Verläufe der Feldgrößen auch in Wandnähe berechnet werden, sind Modelle notwendig, die auch im wandnahen Bereich gelten. Die Erweiterung von k - ε -Modellen für den wandnahen Bereich werden wegen der dort auftretenden kleinen Werte für die lokale Reynolds-Zahl als low-Reynolds-number oder kurz low-Re k - ε -Modelle bezeichnet. Das Problem der mit der Benutzung von low-Re k - ε -Modellen verbundenen übermäßig hohen Netzknotendichte für das Gesamtproblem läßt sich bei eingelaufener Strömung *in Wandnähe* durch die Möglichkeit der eindimensionalen Berechnung der wandnahen Strömung umgehen, die dann die für eine dreidimensionale Strömungsberechnung notwendigen Randbedingungen liefern kann (siehe Abbildung 3.1).

Dazu werden die Werte der Variablen am wandnächsten Punkt zusammen mit den Wandrandbedingungen als Randbedingungen der eindimensionalen Rechnung verwendet, die ihrerseits Werte der Tangentialkomponenten von $\underline{\underline{g}} \underline{\underline{n}}$, die Gesamtwärmestromdichte und die Flußdichten von \tilde{k} und $\tilde{\varepsilon}$ (siehe Gleichungen (A.9) bis (A.12)) als Randbedingungen an die dreidimensionale Strömung liefert.

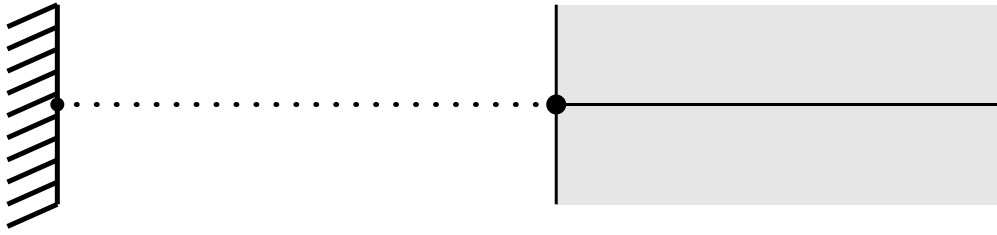


Abbildung 3.1.: Eindimensionale Berechnung des wandnahen Bereichs

Als Wandrandbedingungen können die Haftbedingung und die Wärmestromdichte oder die (stetige) Temperatur an der Wand angewendet werden. Die Turbulenzenergie muß, da direkt an der Wand keine Geschwindigkeitsfluktuationen mehr auftreten können, an der Wand den Wert Null annehmen.

Die exakte Randbedingung für die Dissipation der Turbulenzenergie läßt sich aus der Transportgleichung der Turbulenzenergie gewinnen und lautet $\tilde{\varepsilon}_w = \nu \partial^2 \tilde{k} / \partial n^2|_w$. Da die exakte Randbedingung zu numerischen Schwierigkeiten führt, wird oft die numerisch robustere Neumann-Randbedingung $\partial \tilde{\varepsilon} / \partial n|_w = 0$ verwendet, die nach [SAA92] unbegründet ist, für die aber in [PRS85] und [Vio87] Plausibilitätsklärungen gegeben werden, und die nach [Hil95] und eigenen Rechnungen zu guter Übereinstimmung mit experimentellen Daten und auch zu einer annähernden Erfüllung der exakten Randbedingung führt.

Rauhe Wände können durch Einführung weiterer in einer Studienarbeit mit dem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Programm empirisch ermittelter Funktionen f_r und f_T , die im Bereich der Rauigkeit von Eins abweichen, bei ansonsten unveränderten Randbedingungen modelliert werden ([Rup97], siehe auch Anhang A.4.5).

Ist der Einfluß der molekularen Viskosität beispielsweise in der Nähe fester Wände oder bei kleinen Werten der Reynolds-Zahl nicht mehr vernachlässigbar, so müssen die Differentialgleichungen modifiziert werden. Eine Dämpfung des Wertes der Turbulenzviskosität (c_μ wird ersetzt durch $f_\mu c_\mu$) liegt wegen der „turbulenzhemmenden“ Wirkung fester Wände nahe und führt bereits zu einer guten Wiedergabe der Turbulenzenergie im wandnahen Bereich [MKM89]. In Wandnähe ist zusätzlich eine Korrektur der Dissipationsgleichung erforderlich, die meist durch Ersetzen von $c_{\varepsilon 1}$ durch $f_1 c_{\varepsilon 1}$ und $c_{\varepsilon 2}$ durch $f_2 c_{\varepsilon 2}$ vorgenommen wird [PRS85]. Funktionen f_μ , f_1 und f_2 , die zu einer guten Modellierung des wandnahen Bereichs führen, sind in Anhang A.4.5 aufgeführt.

Das stationäre eindimensionale Differentialgleichungssystem, mit dessen Hilfe der wandnahe Bereich simuliert wird, findet sich in Anhang A.3. Angaben zu der Verbindung mit den in Abschnitt 4.2.3 beschriebenen Modifikationen erreichten Effizienz der eindimensionalen Simulation werden in Abschnitt 5.1 gegeben.

3.5. Normierung des Gleichungssystems

In diesem Abschnitt sind die den numerischen Simulationen in den Kapiteln 4 und 5 zugrundeliegenden dimensionslosen Gleichungen für den Kernbereich wiedergegeben. Neu ist die Normierung der Turbulenzfeldgrößen. Die dimensionslosen Gleichungen zur Modellierung des wandnahen Bereichs bei turbulenten Strömungen sind, da keine neuen Normierungsvorschriften verwendet werden, in Anhang A.3 aufgeführt.

Ziel der Überführung des Gleichungssystems in eine dimensionslose Form ist es, sehr große oder sehr kleine Werte für die Feldvariablen zu vermeiden und so ein numerisch günstigeres Gleichungssystem zu erhalten. Anhand des dimensionslosen Gleichungssystems ist weiterhin die Abschätzung der Größenordnung der einzelnen Terme sowie das Ableiten der für sie charakteristischen Kennzahlen möglich. Es werden alle Größen so normiert, daß die normierten Größen Werte in der Größenordnung von 10^0 haben.

Dazu wird jede Größe f nach der Vorschrift

$$f^* = (f - f_0) / \Delta f_0 \quad (3.17)$$

in eine dimensionslose Form gebracht, wobei der Stern die dimensionslose Größe kennzeichnet, f_0 ein mittlerer Wert und Δf_0 die mittlere Schwankung der Größe f ist. Falls der Wert der Größe um Null schwankt oder Werte im Bereich von Null bis zu einem Maximalwert annimmt, erhält man mit der Vorschrift

$$f^* = f/f_0 \quad \text{oder} \quad f^* = f/\Delta f_0 \quad (3.18)$$

eine dimensionslose Größe, die Werte in der Größenordnung von 10^0 annimmt.

Die Zeitkoordinate wird auf eine charakteristische Zeitdifferenz Δt_0 (der Zeitpunkt $t = 0$ liege im betrachteten Zeitintervall) und die Ortskoordinaten werden in der Form (3.18) auf eine charakteristische Länge l_0 bezogen (der Koordinatenursprung liege im betrachteten Strömungsgebiet). Die Geschwindigkeit wird, da sie Werte von Null an den Wänden bis zu einer Maximalgeschwindigkeit annimmt, auf eine mittlere Geschwindigkeit v_0 bezogen. Bei den Ortskoordinaten und den Geschwindigkeitskomponenten wäre eine Unterscheidung zwischen den verschiedenen Koordinatenrichtungen möglich – mittlere Geschwindigkeit und charakteristische Länge sind in Hauptströmungsrichtung größer als senkrecht dazu. Darauf wird im Rahmen dieser Arbeit der Übersichtlichkeit der resultierenden Gleichungen und der schwierigen Erweiterbarkeit auf eine nicht feste Hauptströmungsrichtung wegen verzichtet.

Bei der Normierung von Druck und Temperatur ist die Wahl der Form (3.17) unumgänglich. Oft wird dabei der mittlere Druck p_0 zu Null gesetzt, was sich aber in dieser Arbeit wegen der Betrachtung auch druckabhängiger Stoffwerte verbietet. Im Abschnitt 4.3 wird die Bedeutung und Leistungsfähigkeit der so gewählten Normierung des Drucks deutlich.

Die Normierung von \tilde{k} und $\tilde{\varepsilon}$ kann in der Form (3.18) vorgenommen werden, da beide Größen positiv sind und jeweils Werte von Null bis zu den entsprechenden Höchstwerten einnehmen. Die Bezugsgröße für \tilde{k} und $\tilde{\varepsilon}$ ist so zu bestimmen, daß die Werte in der Größenordnung

von 10^0 liegen. Bei den im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Innenströmungen sind die oft verwendeten Werte v_0^2 und v_0^3/l_0 viel zu groß. Werden wie in dieser Arbeit zur Normierung dagegen die Werte

$$k_0 = \sqrt{\frac{\nu_0 v_0^3}{l_0}} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} v_0^2 \quad \text{und} \quad \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{\nu_0 v_0^5}{l_0^3}} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{v_0^3}{l_0} \quad (3.19)$$

verwendet, so nehmen k^* und $\tilde{\varepsilon}$ Werte um 10^0 an.

Die in den Gleichungen auftretenden Materialwerte werden in dieser Arbeit einheitlich auf den zur Temperatur T_0 und zum Druck p_0 gehörenden Wert normiert.

Mit den Normierungen

$$t^* = \frac{t}{\Delta t_0}, \quad x^* = \frac{x}{l_0}, \quad v^* = \frac{\tilde{v}}{v_0}, \quad p^* = \frac{\bar{p} - p_0}{\Delta p_0}, \quad T^* = \frac{\bar{T} - T_0}{\Delta T_0}, \quad k^* = \frac{\tilde{k}}{k_0}, \quad \varepsilon^* = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_0} \quad \text{und}$$

$$\rho^* = \frac{\bar{\rho}}{\rho_0}, \quad \nu^* = \frac{\tilde{\nu}}{\nu_0}, \quad g^* = \frac{g}{g_0}, \quad \lambda^* = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda_0}, \quad c_p^* = \frac{\tilde{c}_p}{c_{p,0}}, \quad \beta^* = \frac{\bar{\beta}}{\beta_0}$$

sowie den daraus abgeleiteten Normierungsvorschriften

$$\nu_t^* = \frac{\nu_t}{k_0^2/\varepsilon_0}, \quad \widetilde{v_i'' v_j''}^* = \frac{\widetilde{v_i'' v_j''}}{v_0^2/\sqrt{\text{Re}}} = \frac{\widetilde{v_i'' v_j''}}{k_0} \quad \text{und} \quad \widetilde{v_i'' T'}^* = \frac{\widetilde{v_i'' T'}}{v_0 \Delta T_0/\sqrt{\text{Re}}}$$

ergeben sich dimensionslose Gleichungen mit den Kennzahlen

$$\text{Ec} = \frac{v_0^2}{c_{p,0} \Delta T_0}, \quad \text{Eu} = \frac{\Delta p_0}{\rho_0 v_0^2}, \quad \text{Fr} = \frac{v_0^2}{l_0 g_0}, \quad \text{Pr} = \frac{\rho_0 \nu_0 c_{p,0}}{\lambda_0}, \quad \text{Pé} = \text{Re Pr} = \frac{v_0 l_0 \rho_0 c_{p,0}}{\lambda_0},$$

$$\text{Ma} = \frac{v_0}{v_{\text{schall}}}, \quad \text{Re} = \frac{l_0 v_0}{\nu_0}, \quad \text{Sl} = \frac{v_0 \Delta t_0}{l_0}, \quad \beta_0 T_0 \quad \text{und} \quad \frac{\Delta T_0}{T_0}. \quad (3.20)$$

Die Kontinuitätsgleichung (A.1) geht nach Multiplikation mit $l_0/(\rho_0 v_0)$ über in

$$\frac{1}{\text{Sl}} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x_k^*} (\rho^* v_k^*) = 0 \quad (3.21)$$

mit der die zeitliche Entwicklung charakterisierenden Strouhal-Zahl Sl (Verhältnis der zeitlichen Änderungsgeschwindigkeit der Randbedingungen wie beispielsweise die Frequenz von Vibrationen zur charakteristischen Frequenz der Strömung). Für zeitlich konstante Randbedingungen, beispielsweise bei der Entstehung von Schwingungen in dem Fluid selbst ohne den Einfluß einer äußeren erregenden Kraft, ist die Strouhal-Zahl eine Funktion ausschließlich der Reynolds-Zahl Re [LL86].

In der dimensionslosen Impulsbilanz (Gleichung (A.2) nach Multiplikation mit $l_0/(\rho_0 v_0^2)$)

$$\frac{1}{\text{Sl}} \rho^* \frac{\partial v_j^*}{\partial t^*} + \rho^* v_k^* \frac{\partial v_j^*}{\partial x_k^*} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_k^*} \left(\rho^* \nu^* \left(\frac{\partial v_j^*}{\partial x_k^*} + \frac{\partial v_k^*}{\partial x_j^*} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \frac{\partial v_l^*}{\partial x_l^*} \right) \right) \quad (3.22)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{\partial}{\partial x_k^*} \left(-\rho^* \widetilde{v_j'' v_k''}^* \right) - \text{Eu} \frac{\partial p^*}{\partial x_j^*} + \frac{1}{\text{Fr}} \rho^* g_j^*$$

ergeben sich zusätzlich zur Strouhal-Zahl drei weitere Kennzahlen. Der Koeffizient der viskosen Diffusionsterme ist umgekehrt proportional zur Reynolds-Zahl Re , die das Verhältnis von Trägheitskraft zu viskoser Kraft darstellt. Die Reynolds-Zahl taucht auch im Koeffizienten der turbulenten Diffusion auf. Allerdings ist der Koeffizient dieses Terms nur umgekehrt proportional zur Quadratwurzel der Reynolds-Zahl, was die Tatsache widerspiegelt, daß die turbulente Diffusion bei hohen Werten der Reynolds-Zahl gegenüber der viskosen Diffusion überwiegt. Der Druckterm ist proportional zur Euler-Zahl Eu , die ein Maß für das Verhältnis von Druck- zu Trägheitskraft ist. Die Froude-Zahl Fr schließlich charakterisiert das Verhältnis von Trägheitskraft zu Wirkung der Gravitation und findet sich daher im Term der Volumenkraft wieder.

Die Reynoldsschen Spannungen nach Gleichung (3.3) lauten mit der oben angegebenen Normierung

$$\begin{aligned} -\widetilde{v_i''v_j''}^* &= -\frac{2}{3}\delta_{ij}k^* + c_\mu \frac{k^{*2}}{\varepsilon^*} \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} - \frac{2}{3}\delta_{ij} \frac{\partial v_l^*}{\partial x_l^*} \right) \\ &\quad - \frac{k^{*3}}{\varepsilon^{*2}} \left[c_{\tau 1} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_\mu^*} \frac{\partial v_j^*}{\partial x_\mu^*} + c_{\tau 2} \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_\mu^*} \frac{\partial v_\mu^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_\mu^*} \frac{\partial v_\mu^*}{\partial x_i^*} \right) + c_{\tau 3} \frac{\partial v_\mu^*}{\partial x_i^*} \frac{\partial v_\mu^*}{\partial x_j^*} \right. \\ &\quad \left. - \frac{c_{\tau 1} + c_{\tau 3}}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_\mu^*}{\partial x_\lambda^*} \frac{\partial v_\mu^*}{\partial x_\lambda^*} - \frac{2}{3} c_{\tau 2} \delta_{ij} \frac{\partial v_\lambda^*}{\partial x_\mu^*} \frac{\partial v_\mu^*}{\partial x_\lambda^*} \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Die Gleichungen für k^* (Gleichung (A.5) nach Multiplikation mit $l_0 \sqrt{Re}/(\rho_0 v_0^3)$) und für ε^* (Gleichung (A.7) nach Multiplikation mit $l_0^2 \sqrt{Re}/(\rho_0 v_0^4)$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{Sl} \rho^* \frac{\partial k^*}{\partial t^*} + \rho^* v_k^* \frac{\partial k^*}{\partial x_k^*} &= \rho^* (\mathcal{P}_k^* - \varepsilon^*) + \frac{1}{\sqrt{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\rho^* \frac{\nu_t^*}{\sigma_k} \frac{\partial k^*}{\partial x_j^*} \right) \\ &\quad + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\rho^* \nu^* \frac{\partial k^*}{\partial x_j^*} \right) \quad \text{und} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Sl} \rho^* \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t^*} + \rho^* v_k^* \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_k^*} &= \rho^* \frac{\varepsilon^*}{k^*} (c_{\varepsilon 1} \mathcal{P}_k^* - c_{\varepsilon 2} \varepsilon^*) + \frac{1}{\sqrt{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\rho^* \frac{\nu_t^*}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_j^*} \right) \\ &\quad + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\rho^* \nu^* \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_j^*} \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

mit dem dimensionslosen Produktionsterm der Turbulenzenergie

$$\mathcal{P}_k^* = \frac{\mathcal{P}_k}{v_0^3/(l_0 \sqrt{Re})} = \frac{\mathcal{P}_k}{\varepsilon_0} = -\widetilde{v_i''v_j''}^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*}$$

enthalten keine zusätzlichen Kennzahlen. Alternative Formulierungen des Produktions- und Dissipationsterms sind im Abschnitt 3.1.2 wiedergegeben. Die Terme der viskosen und turbulenten Diffusion besitzen jeweils dieselben Koeffizienten wie die entsprechenden Terme der Impulsbilanz (3.22).

Auch in den Gleichungen für \tilde{k} und $\tilde{\varepsilon}$ überwiegt die turbulente Diffusion bei hohen Reynolds-Zahlen offensichtlich gegenüber der viskosen Diffusion.

In der dimensionslosen Energiebilanz

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\text{Sl}} \rho^* c_p^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \rho^* c_p^* v_k^* \frac{\partial T^*}{\partial x_k^*} &= \text{Ec Eu } \beta_0 T_0 \left(1 + \frac{\Delta T_0}{T_0} T^* \right) \beta^* \left(\frac{1}{\text{Sl}} \frac{\partial p^*}{\partial t^*} + v_k^* \frac{\partial p^*}{\partial x_k^*} \right) \quad (3.26) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \text{Ec Eu } \beta_0 T_0 \frac{\Delta T_0}{T_0} \beta^* \widetilde{T' v_k''^*} \frac{\partial p^*}{\partial x_k^*} + \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \rho^* \widetilde{T' v_k''^*} \frac{\partial c_p^*}{\partial x_k^*} \\
&+ \frac{\text{Ec}}{\text{Re}} \rho^* \nu^* \frac{\partial v_j^*}{\partial x_k^*} \left(\frac{\partial v_j^*}{\partial x_k^*} + \frac{\partial v_k^*}{\partial x_j^*} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \frac{\partial v_l^*}{\partial x_l^*} \right) + \frac{\text{Ec}}{\sqrt{\text{Re}}} \rho^* \varepsilon^* \\
&- \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{\partial}{\partial x_k^*} \left(\rho^* c_p^* \widetilde{T' v_k''^*} \right) + \frac{1}{\text{Pé}} \frac{\partial}{\partial x_k^*} \left(\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial x_k^*} \right),
\end{aligned}$$

die durch Multiplikation mit $l_0/(\rho_0 v_0 c_{p,0} \Delta T_0)$ aus Gleichung (A.3) hervorgeht, kommen noch die Prandtl-Zahl Pr , die eine reine Stoffgröße ist und das Verhältnis von Impuls- zu Wärmediffusion beschreibt, die Eckert-Zahl Ec , die den Einfluß der Kompressibilität in der Energiebilanz beschreibt und das Verhältnis von kinetischer Energie zu Enthalpiedifferenz ist, und die Péclet-Zahl Pé hinzu, die ein Maß für das Verhältnis von Wärmeübertragung durch Konvektion zu Wärmeübertragung durch Wärmeleitung ist. Außerdem tauchen noch zwei nicht benannte charakteristische Größen ($\beta_0 T_0$ und $\Delta T_0/T_0$) in den Koeffizienten der in der Regel kleinen Terme der rechten Seite auf.

Die Geschwindigkeits-Temperatur-Korrelation nach Gleichung (3.4) geht über in

$$-\widetilde{v_i'' T'}^* = \left(c_{T1} k^* \delta_{ij} + \frac{k^{*2}}{\varepsilon^*} \left(c_{T2} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + c_{T3} \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \right) \right) \frac{k^*}{\varepsilon^*} \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*}, \quad (3.27)$$

die Geschwindigkeits-Temperatur-Korrelation nach Gleichung (3.5) in

$$-\widetilde{v_i'' T'}^* = -c_T \widetilde{v_i'' v_j'}^* \frac{k^*}{\varepsilon^*} \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} \quad (3.28)$$

und schließlich die Geschwindigkeits-Temperatur-Korrelation nach Gleichung (A.8) in

$$-\widetilde{v_i'' T'}^* = \frac{\nu_t^*}{\text{Pr}_t} \frac{\partial T^*}{\partial x_i^*}. \quad (3.29)$$

Aus der Druckpoissongleichung (3.11) für den Effektivdruck $p_{\text{eff}}^* = p^* + 2 \rho^* k^*/(3 \text{Eu} \sqrt{\text{Re}})$ folgt nach Multiplikation mit $l_0^2/\Delta p_0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_j^{*2}} p_{\text{eff}}^* &= -\frac{1}{\text{Sl Eu}} \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\rho^* \frac{\partial v_j^*}{\partial t^*} \right) - \frac{1}{\text{Eu}} \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\rho^* v_k^* \frac{\partial v_j^*}{\partial x_k^*} \right) + \frac{1}{\text{Fr Eu}} g_j^* \frac{\partial \rho^*}{\partial x_j^*} \quad (3.30) \\
&+ \frac{1}{\text{Eu Re}} \frac{\partial^2}{\partial x_j^* \partial x_k^*} \left(\rho^* \nu^* \left(\frac{\partial v_j^*}{\partial x_k^*} + \frac{\partial v_k^*}{\partial x_j^*} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \frac{\partial v_l^*}{\partial x_l^*} \right) \right) \\
&+ \frac{1}{\text{Eu} \sqrt{\text{Re}}} \frac{\partial^2}{\partial x_j^* \partial x_k^*} \left(-\rho^* \left(\widetilde{v_j'' v_k''}^* - \frac{2}{3} \delta_{jk} k^* \right) \right).
\end{aligned}$$

Die Ähnlichkeit stark beheizter Strömungen sicherzustellen, ist wegen der großen Anzahl von Kennzahlen und der Tatsache, daß die Abhängigkeiten der Stoffwerte unterschiedlicher Fluide von Druck und Temperatur im allgemeinen schon qualitativ unterschiedlich sind, praktisch unmöglich. Werden aus Kostenerwägungen heraus trotzdem Analogieexperimente mit Fluiden und Kanalgeometrien durchgeführt, die sich von dem auszulegenden Wärmetauscher unterscheiden, so ist eine Rechtfertigung durch entsprechende numerische Simulationen geboten.

Zur Berechnung laminarer Strömungen werden Gleichung (3.22) zur Bestimmung des Geschwindigkeitsfelds, Gleichung (3.30) zur Bestimmung des Druckfelds und Gleichung (3.26) zur Bestimmung des Temperaturfelds verwendet, wobei der Reynoldssche Spannungstensor, die Geschwindigkeits-Temperatur-Korrelation und die turbulente Dissipation verschwinden.

Bei der Berechnung turbulenter Strömungen werden zusätzlich die Bilanzgleichungen (3.24) und (3.25) zur Bestimmung der Turbulenzfeldgrößen \tilde{k} und $\tilde{\varepsilon}$ herangezogen. In Kapitel 5.2 werden auch die in Abschnitt 3.1 wiedergegebenen Modifikationen der Bilanzgleichungen für die Turbulenzfeldgrößen angewendet. Die Modellierung des Reynoldsschen Spannungstensors erfolgt durch die in Gleichung (3.23) gegebene nichtlineare Beziehung zwischen den Komponenten des Spannungstensors und den Geschwindigkeitsableitungen. Den linearen Ansatz erhält man aus dem nichtlinearen Ansatz durch Nullsetzen von $c_{\tau 1}$, $c_{\tau 2}$ und $c_{\tau 3}$. Die bei den Simulationen verwendeten Koeffizienten, die Modellgleichungen für den wandnahen Bereich und die verwendeten universellen Wandgesetze sind in den Abschnitten A.3 und A.4 wiedergegeben.

4. Numerisches Verfahren

Nachdem im dritten Kapitel die möglichst wirklichkeitsnahe Abbildung thermofluiddynamischer Probleme in Form von partiellen Differentialgleichungen mit Randbedingungen beschrieben wurde, werden in diesem Kapitel Methoden zur genauen und effizienten Lösung dieser Gleichungen vorgestellt. Da die Lösung mit der Ausnahme weniger Spezialfälle nicht analytisch möglich ist, muß die Lösung numerisch erfolgen.

Zur Erlangung lokal fein aufgelöster Information über die betrachteten Strömungsprobleme ist ein numerisches Lösungsverfahren notwendig, dessen Ergebnisse keine signifikanten Abweichungen von der exakten Lösung der Gleichungen unter den gegebenen Randbedingungen zeigen. Diese eigentlich selbstverständliche Voraussetzung ist allerdings nicht leicht zu befriedigen und oft nicht erfüllt. Ein zentraler Punkt jeder Strömungssimulation ist daher die Auswahl des numerischen Verfahrens, mit dem die Modellgleichungen gelöst werden sollen.

Zur Lösung partieller Differentialgleichungen stehen verschiedene Verfahren zur Verfügung, von denen in der Strömungssimulation vor allem die Verfahren der finiten Differenzen, der finiten Volumen und der finiten Elemente eingesetzt werden. Alle Verfahren gewinnen mittels unterschiedlicher Ansätze aus den (partiellen) Differentialgleichungen ein System algebraischer Gleichungen. Dieser Schritt heißt *Diskretisierung* der Gleichungen. Die Lösung der so erhaltenen algebraischen Gleichungen führt auf eine Näherungslösung. Strebt diese Näherungslösung für eine sehr große Anzahl von algebraischen Gleichungen – entsprechend beispielsweise einer sehr großen Anzahl von Diskretisierungspunkten, -volumina oder -elementen und damit einem sehr feinen Netz – gegen die exakte Lösung, so heißt das Verfahren *konsistent*. Konvergiert das Verfahren für eine gegebene Anzahl von algebraischen Gleichungen auch dann, wenn eine eventuell vorzugebende erste Schätzung der Lösung noch nicht sehr nahe an der exakten Lösung liegt, so ist das Verfahren *stabil*. Die Stabilität des Verfahrens hängt von einer Vielzahl von Parametern ab, so daß sie im allgemeinen nicht a priori nachgewiesen werden kann, sondern mittels durchgeführter Berechnungen bestätigt werden muß.

Eine Beschreibung der Vor- und Nachteile unterschiedlicher Diskretisierungsverfahren sowie eine eingehendere Vorstellung des in dieser Arbeit gewählten, in der Fluidodynamik bisher selten anzutreffenden Verfahrens, der Methode der finiten Elemente, bilden den Inhalt des ersten Abschnitts dieses Kapitels.

Für die Anwendung des entwickelten Rechenverfahrens auf komplexe dreidimensionale Strömungen mit Beheizung sind die im zweiten Abschnitt beschriebenen Verfahren zur Effizienzsteigerung von wesentlicher Bedeutung. So wird beispielsweise die Konsistenz des Diskretisierungsverfahrens nicht durch das Verfahren zur Lösung der algebraischen Gleichungssysteme,

die Relaxationsverfahren, die Werte von Relaxationsfaktoren, die Wahl der Abbruchkriterien und -schranken oder die Verfahren zur Stoffwertberechnung beeinflusst, wohl aber die zur Berechnung des Gesamtproblems notwendige Rechenzeit und die Stabilität des Verfahrens. Die Diskretisierung der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen ist auch bei vorgegebenem Diskretisierungsverfahren nicht eindeutig. Durch die beschriebenen Modifikationen der Diskretisierung wird die zur Berechnung des Gesamtproblems notwendige Rechenzeit deutlich reduziert.

Den dritten Abschnitt des Kapitels bildet die durch den Vergleich mit analytischen Lösungen vorgenommene Verifikation des numerischen Verfahrens anhand sich entwickelnder laminarer Strömungen durch einen ebenen Kanal, ein Kreisrohr und ein Stabbündel.

4.1. Diskretisierungsverfahren

Die in der Strömungsmechanik am häufigsten angewendeten Diskretisierungen, die Verfahren der finiten Differenzen, der finiten Volumen und der finiten Elemente, werden zu Beginn dieses Abschnitts gegenübergestellt und die Wahl der Methode der finiten Elemente zur Diskretisierung der Gleichungen begründet.

Die Verfahren der finiten Differenzen und der finiten Volumen werden oft als Spezialfälle einer allgemeinen finite Elemente-Diskretisierung oder der Methode der gewichteten Residuen bezeichnet. Da die Gewichtsfunktionen (siehe Abschnitt 4.1.1) dann aber den Bedingungen nicht genügen, unter denen die Konsistenz gesichert ist [Fle84, § 1.3.5], und die Verfahren signifikante Unterschiede aufweisen, werden die drei Verfahren der finiten Differenzen, der finiten Volumen und der finiten Elemente nach Galerkin einander gegenübergestellt.

Ein wesentliches Auswahlkriterium ist die Fähigkeit der Verfahren, die gegebenen Erhaltungsgleichungen mit ihren Randbedingungen konsistent zu lösen. Bezüglich der Erhaltungsgrößen ist allein die Methode der finiten Differenzen problematisch, da sie, insbesondere bei den in dieser Arbeit notwendigen, nicht äquidistanten Gittern, nicht konservativ ist [Sch90]. Die exakte Berücksichtigung aller Randbedingungen ist nur mit der Methode der finiten Elemente möglich [Sch90]. Vorteilhaft ist die exakte Berücksichtigung aller Randbedingungen auch bei Mehrgitterverfahren; die Methoden der finiten Volumen und der finiten Differenzen können bei der Lösungsübertragung Probleme bereiten, da Neumann-Randbedingungen durch einseitige Differenzenverfahren approximiert werden und damit von der Netzfeinheit abhängen [FP96, Kapitel 11.1].

Welche Methode am effizientesten arbeitet, ist in der Literatur nicht unumstritten [Sch90] und auch eine Frage der Implementation und der Einschränkungen bei der Netzgenerierung. Eine Entscheidung für oder gegen ein Verfahren ist daher nicht durch das Kriterium der Rechenzeit zu begründen. Auch Stabilitätsprobleme aufgrund der nichtlinearen Konvektions- und Quellterme sind eher eine Frage der Implementation als des Verfahrens selbst.

Der Effizienzvorteil der Verfahren der finiten Volumen oder Differenzen gegenüber den finiten Elementen, der sich durch den Einsatz spezialisierter Löser ergibt, die die spezielle Struktur

der sich ergebenden Matrizen ausnutzen, existiert nur bei Verwendung einfacher, strukturierter Netze. Bei den zur Berechnung realer Strömungen notwendigen komplexen und in der Regel unstrukturierten Netzen sind die Matrizen der algebraischen Gleichungssysteme bei allen drei Verfahren nicht von spezieller Struktur [FP96, Kapitel 2.6 und 8.5].

Ein gewichtiges Argument für die Wahl der Methode der finiten Elemente ist die Flexibilität der Methode (Verwendung unstrukturierter Netze, beliebige lokale Netzverfeinerung, gute Anpassung an gekrümmte Ränder), die gerade bei komplexen Geometrien und unterschiedlichen Kanalformen den vom Benutzer zu treibenden Aufwand erheblich reduziert [FP96, Kapitel 2.6], [HSH87].

Die Entscheidung erfolgte für die Methode der finiten Elemente, da sie die Erhaltungssätze nicht verletzt, Randbedingungen exakt berücksichtigen kann, mathematisch am besten analysiert ist [FP96, Kapitel 2.6] und die höchste Flexibilität aufweist, auch wenn der Aufwand zur Diskretisierung und zur Implementation am größten ist.

4.1.1. Die Methode der finiten Elemente

Als Beispiel werde eine partielle Differentialgleichung einer Funktion Φ

$$\mathcal{L}(\Phi) - f_l = 0 \quad (4.1)$$

im Gebiet G mit dem Differentialoperator \mathcal{L} betrachtet. Die Randbedingungen seien durch

$$\mathcal{M}(\Phi) - f_g = 0 \quad (4.2)$$

auf dem Rand $\Gamma = \partial G$ des Gebiets G mit dem Differentialoperator \mathcal{M} gegeben und das Problem damit korrekt gestellt.

Die gesuchte Funktion Φ werde durch

$$\hat{\Phi} = \phi_0 + \sum_{i=1}^N f_i \phi_i \quad (4.3)$$

approximiert, wobei ϕ_0 die inhomogenen Randbedingungen erfüllen muß und die ϕ_i , die aus einem vollständigen Funktionensystem zu wählen sind, auf dem Rand verschwinden sollen ($\phi_i|_{\Gamma} = 0$ für $i \neq 0$).

Das Residuum

$$\epsilon = \mathcal{L}(\hat{\Phi}) - f_l \quad (4.4)$$

verschwindet für endliches N nicht identisch in G . Die Methode der gewichteten Residuen fordert aber das Verschwinden des Residuums im Mittel:

$$\int_G w_i \epsilon \, dV = 0. \quad (4.5)$$

Daraus folgt ein System algebraischer Gleichungen für die f_i .

Bei Galerkins Methode sind die Gewichtsfunktionen w_i identisch mit den Approximationsfunktionen ϕ_i ($w_i = \phi_i$). Die Galerkinsche finite Elemente-Methode heißt auch Bubnow-Galerkinsche finite Elemente-Methode im Gegensatz zur Petrov-Galerkinschen finite Elemente-Methode, bei der Gewichts- und Ansatzfunktionen verschieden sind.

Die Konsistenz dieser Methode, also $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\Phi} = \Phi$, ist für eine Vielzahl partieller Differentialgleichungen nachgewiesen. Eine Vergrößerung von N kann durch Erhöhen der Approximationsordnung oder durch Erhöhen der Elementanzahl bei gleichbleibender Approximationsordnung (Netzverfeinerung) erreicht werden.

Durch partielle Integration des Residuenintegrals (Integrationsformeln siehe [BS79], [Spe99]) kann die Ordnung der höchsten Ableitungen im Integranden halbiert werden (sogenannte schwache Formulierung der Differentialgleichung). Falls der Differentialoperator \mathcal{L} die Ordnung $2n$ oder $2n - 1$ besitzt, führt die schwache Formulierung dazu, daß $\Phi_i \in C^n(G)$ anstelle von $\Phi_i \in C^{2n}(G)$ oder $\Phi_i \in C^{2n-1}(G)$ ausreichend ist.

Bei der Methode der finiten Elemente werden die Funktionen ϕ_i lokal definiert. Dazu wird das Gebiet G in Untergebiete $G^{(e)}$, die finiten Elemente, gemäß $G = \bigcup_e G^{(e)}$ und $G^{(i)} \cap G^{(j)} = 0$ für $i \neq j$ eingeteilt. Die elementweise definierten Approximationsfunktionen müssen bei Verwendung der schwachen Formulierung aus $C^n(G^{(e)})$ und $C^{(n-1)}$ -konform sein, das heißt die resultierende globale Approximationsfunktion muß aus $C^{(n-1)}(G)$ sein.

Praktisch werden zum Aufbau des Systems algebraischer Gleichungen erst die Berechnungen der Gebietsterme der schwachen Formulierung getrennt für jedes Element ausgeführt, die Gleichungen dann in ein System algebraischer Gleichungen zusammengeführt und schließlich alle Randbedingungen in das System integriert.

Die tatsächlich benutzten Elemente werden in der Regel mittels einer eindeutigen Transformationsvorschrift auf Einheits-elemente abgebildet, für die dann auch die Approximationsfunktionen definiert werden, die man auch als Formfunktionen oder Interpolationsfunktionen bezeichnet. Wenn die Integration der Gebietsintegrale der schwachen Formulierung analytisch nicht möglich ist, erfolgt die Integration numerisch. Dabei sind allerdings spezifische Anforderungen an die Quadratureschemata zu stellen. Bei nichtlinearen Gleichungen oder nichtkonstanten Koeffizienten muß die Integrationsordnung der numerischen Integration entsprechend der Differentialgleichung höher liegen als durch die Mindestanforderungen festgelegt [Spe99].

Die Wahl der Ansatzfunktionen für Druck und Geschwindigkeitskomponenten ist von der Art der betrachteten Strömung abhängig. Für inkompressible, diffusionsdominierte Strömungen müssen die Ansatzfunktionen für den Druck von geringerer Ordnung sein als für die Geschwindigkeitskomponenten (Brezzi-Babuska-Bedingung, [Sch90]) oder äquivalent dazu ist eine geringe Ordnung des numerischen Integrationsschemas für den Druck zu verwenden [SRY78], [Fle91b, § 17.2].

Falls Trägheitseffekte signifikant sind, wie in den betrachteten Zwangskonvektionsströmungen durch Stabbündel, gilt die Brezzi-Babuska-Bedingung nicht mehr. Dann muß die Ordnung der Druckansatzfunktionen nach [SRY78] größer oder gleich der Ordnung der Ge-

schwindigkeitsansatzfunktionen sein. So sind Ansätze gleicher Ordnung bei der Penalty-FEM-Methode [Seg85], [RRRA93] und bei Verwendung einer Druckpoissonsgleichung [RS86], [SR87], [Sha91] erfolgreich angewendet worden. In dieser Arbeit werden für alle Feldvariablen Ansätze erster Ordnung verwendet.

Die im Rahmen dieser Arbeit berücksichtigten dreidimensionalen Elemente Tetraeder, Dreieckprisma und Quader sind zusammen mit den zugehörigen Formfunktionen erster Ordnung, den isoparametrischen Transformationen, den Jacobimatrizen und Schemata zur numerischen Integration sowie einer Bewertung der Integrationsschemata in [Spe99] wiedergegeben.

4.1.2. Netzgenerierung und -analyse

Insbesondere bei komplexen durchströmten Kanälen sind randangepaßte Netze und lokale Netzverfeinerung von Bedeutung; dem Netz kommt dann in Bezug auf die erreichbare Genauigkeit mindestens der gleiche Stellenwert zu wie den gewählten Näherungen und dem Diskretisierungsverfahren [FP96, Kapitel 8.2]. Die Wiedergabe des Strömungsfelds ist besser, wenn numerische Vorzugslinien und Stromlinien zusammenfallen, als wenn dies nicht der Fall ist [FP96, Kapitel 8.1.3 und 8.2], [MH85]. Daher liefert beispielsweise die Methode der Charakteristiken gute Ergebnisse. Auch im Hinblick auf möglicherweise auftretende künstliche Diffusion ist eine Ausrichtung des Netzes an den Stromlinien wünschenswert [Fer87].

Den Elementformen Quader und Dreieckprisma wird in dieser Arbeit der Vorzug vor Tetraederelementen gegeben, da sie für das Rechenverfahren vorteilhaft an den Stromlinienverlauf (besonders bei einer dominanten Hauptströmungsrichtung) und an Wände anpaßbar sind, auch wenn mit Tetraederelementen die Vernetzung dreidimensionaler Geometrien in der Regel einfacher ist und Tetraederelemente weniger überschüssige Freiheitsgrade besitzen. Viereckpyramiden kommen als Elementform nicht in Betracht, da keine zu den anderen Elementen C^0 -konformen Ansatzfunktionen bildbar sind.

Zur automatischen Netzgenerierung wurden Programme entwickelt, wobei die Form der zu untersuchenden Geometrien ausgenutzt wurde, indem zuerst ein Querschnitt zweidimensional vernetzt und daraus, eventuell unter Drehung und Skalierung des zweidimensionalen Netzes, ein dreidimensionales Netz des betrachteten Kanals erzeugt wird. Für Rechteckkanäle und Stabbündel quadratischer Stabanordnung wurden Netzgeneratoren entwickelt, die blockstrukturierte Netze unter ausschließlicher Verwendung von Quaderelementen erzeugen.

Für beliebige Kanalgeometrien wurde ein Netzgenerator entwickelt, der zuerst um alle Wände eine vorgebbare Anzahl von Quaderelementschichten legt, da bei dreidimensionalen Problemen Quaderelemente in der Nähe fester Wände bessere Ergebnisse liefern als Prismen oder Tetraeder [FP96, Kapitel 8.2], und den verbleibenden Bereich dann unstrukturiert mit Dreieckprismen vernetzt, wobei die Netzknotendichte in diesem Bereich beispielsweise als Funktion der Ortskoordinaten vorgebbbar ist. Auch dreidimensionale Netze aus kommerziellen Programmsystemen wie beispielsweise Tetraedernetze aus $\mathcal{N}3\mathcal{S}$ können verwendet werden.

Bei der eindimensionalen Formulierung in Wandnähe wird die Lage der Gitterpunkte während der einzelnen Berechnungen adaptiv dem Lösungsverlauf angepaßt.

Gerade bei groben dreidimensionalen Netzen kann eine starke Abhängigkeit der Lösung vom verwendeten Netz beobachtet werden [Mur95]. Die Form und Anordnung der Elemente ist allgemein Ursache von Fehlern des numerischen Verfahrens, siehe auch Abschnitt 4.1.3. Zur Bewertung verschiedener Netze sind daher detaillierte Netzinformationen notwendig. Deshalb wurden im Rahmen dieser Arbeit umfangreiche Analyseprogramme für zwei- und dreidimensionale Netze entwickelt, die neben einer Überprüfung des Netzes auf Fehler wie die nicht vollständige Vernetzung von Volumina, Flächen und deren Rändern, Elementüberlappung, mehrfache Knoten, extrem verzerrte Elemente und Gebiets- und Randelemente mit falscher Knotennumerierung eine Vielzahl von Global- und Detailinformationen berechnen wie den Inhalt des insgesamt vernetzten Gebiets und des Randes, Art und Anzahl der enthaltenen Gebiets- und Randelemente, Anzahl der Netzknoten, Anzahl konvexer und konkaver Elemente, minimale und maximale Werte für Volumen, Flächen, Oberflächen, Seitenlängen, Elementdurchmesser und von Elementen eingeschlossene Winkel, auch nach Elementtyp oder Randelementtyp aufgeschlüsselt, und maximale Verhältnisse von Volumen, Flächen, Oberflächen, Seitenlängen, Durchmessern und eingeschlossenen Winkeln benachbarter Elemente gleichen Typs und verschiedener Typen.

4.1.3. Abbruchkriterien und Fehlerbetrachtung

Für das dreidimensionale Differentialgleichungssystem ergibt sich aus der sequentiellen Lösung der einzelnen Gleichungen (Picarditeration), die zusätzlich noch linearisiert sind, eine komplexe Iterationsstruktur, zu deren effizienter Bearbeitung die sorgfältige Wahl der Abbruchkriterien und -schränken jeder Iterationsebene notwendig ist.

Aufgrund der unterschiedlich starken Kopplung der Gleichungen (siehe Abschnitt 3.2), liegt die Einteilung des Gesamtgleichungssystems in zwei Gruppen, die Druckgleichung und die Gruppe aus Impulsbilanz, Turbulenzfeldgrößentransportgleichungen und Energiebilanz nahe. Die unterschiedlich starken Kopplungen der Differentialgleichungen führen zu einer weiteren Unterteilung der zweiten Gleichungsgruppe in die Energiebilanz und die Gruppe aus Impulsbilanz und Turbulenzfeldgrößentransportgleichungen, die wiederum in die Impulsbilanz und die Gruppe der Turbulenzfeldgrößentransportgleichungen unterteilt werden kann. Die unterste Iterationsebene bilden schließlich die iterativen Gleichungslöser für die linearen Gleichungssysteme.

Die als Abbruchkriterium verwendete Norm der Residuen oder Differenzen sollte auf die Norm bei erster Iteration bezogen werden und der Abbruch nicht erfolgen, bevor die Norm der „äußeren“ Iterationen (d. h. der Picarditerationen) um drei bis fünf und der „inneren“ Iterationen (d. h. bei der iterativen Lösung der linearen Gleichungssysteme) um zwei Größenordnungen gefallen ist [FP96, Kapitel 5.6]. Relativ zu einem identisch verschwindenden Feld als Startlösung entspricht die auf den Fehler der Startlösung bezogene Norm der Größe f $\| \underline{f}^{(n+1)} - \underline{f}^{(n)} \| / \| \underline{f} - \underline{f}^{(0)} \| = \| \underline{f}^{(n+1)} - \underline{f}^{(n)} \| / \| \underline{f} \|$ und bei fortgeschrittener Konvergenz damit in guter Näherung $\| \underline{f}^{(n+1)} - \underline{f}^{(n)} \| / \| \underline{f}^{(n)} \|$.

Als Norm findet dabei oft die L_2 -Norm Anwendung [FP96], [RRRA93]. Bei großen und komplexen Netzen kann in wenigen beispielsweise stark verzerrten Elementen die Konvergenz nur mäßig sein. In eine L_1 - oder L_2 -Norm geht ein großer Fehler in wenigen Zellen durch die Mittlung über eine große Zellanzahl nur schwach ein. Weil daher der maximale Fehler aussagekräftiger als ein gemittelter Fehler ist und damit auch die gestellten Kovergenzkriterien entsprechend schärfer werden, wird in dieser Arbeit dagegen der Wert der Maximum-Norm (L_∞) der Residuen und der Differenzen als Abbruchkriterium verwendet.

Anstelle der relativen Änderung der Residuen- und Differenzennorm wird in dieser Arbeit, zusätzlich zu Abbruchschranken für die Norm, die maximale Anzahl der inneren Iterationen getrennt für alle vorkommenden Gleichungen oder Gleichungsgruppen begrenzt. Auf diese Weise steht eine Vielzahl an Abbruchschranken zur Verfügung, mit der die Effizienz des gesamten Verfahrens gut kontrolliert und optimiert werden kann. Eine zusätzliche Steigerung der Rechengeschwindigkeit ist durch die Änderung der Schranken mit zunehmender Konvergenz möglich. So kann beispielsweise zu Anfang ein Satz von Abbruchschranken gewählt werden, der bezüglich einer schnellen Berechnung einer Näherungslösung aus einer Schätzung der Felder optimiert wurde, und bei Erreichen der gegebenen Lösungsgüte auf einen weiteren Satz von Abbruchschranken umgeschaltet werden, der eine effiziente Verbesserung der berechneten Näherungslösung erlaubt.

Zur Kontrolle der Konvergenz und damit zur Überprüfung der Abbruchschranken sollten Vergleichsrechnungen mit sehr kleinen Abbruchschranken oder die Erfüllung von Erhaltungsgleichungen wie beispielsweise der Kontinuitätsgleichung herangezogen werden. Außerdem müssen die Residuen und Differenzen bis auf Rundungsfehler fallen – bei der in dieser Arbeit verwendeten doppeltgenauen Berechnung um etwa 10 bis 15 Größenordnungen (siehe Abbildung 4.4 auf Seite 67).

Für den eindimensionalen Fall braucht das Differentialgleichungssystem bei geeigneter Diskretisierung lediglich in zwei Gruppen, die Energiebilanz und die Gruppe aus Impulsbilanz und Turbulenzfeldgrößentransportgleichungen, unterteilt zu werden. Als Kriterien zum Abbruch werden eine Obergrenze für die Differenzen der Feldgrößen aufeinanderfolgender Iterationen (L_∞ -Norm) und eine Maximalanzahl von Iterationen für beide Gruppen verwendet. Innerhalb der zweiten Gruppe wird bei jeder Iteration jede linearisierte Differentialgleichung genau einmal gelöst.

Abweichungen des berechneten Strömungsfelds können durch eine ungenügende Modellierung der physikalischen Vorgänge oder durch fehlerbehaftete Randbedingungen entstehen. Oft sind beispielsweise Ein- oder Austrittsrandbedingungen nicht gut genug bekannt, da entsprechende Messungen nicht vorliegen oder nur schwer zu erhalten sind. Beide Fehlerquellen sind nicht durch das numerische Verfahren verursacht, sondern müssen vor Anwendung des numerischen Verfahrens reduziert werden.

Bei nur ungenau bekannten Randbedingungen kann der Einfluß ihrer Modifikation numerisch untersucht werden. Da die Genauigkeit stark dadurch beeinflußt ist, wie die Randbedingungen eingebracht werden [Sch90], ist Voraussetzung, daß die Randbedingungen im numerischen Verfahren richtig berücksichtigt werden, was bei der Methode der finiten Elemente der Fall ist.

Die in der Literatur vorgestellten Fehlerquellen numerischer Verfahren lassen sich in drei Gruppen einteilen ([Chu82, S. 67], [DW94], [Fer88], [FP96]): Rundungsfehler, Fehler durch unvollständige Konvergenz und Diskretisierungsfehler.

Rundungsfehler entstehen durch die endliche Genauigkeit, mit der Werte im Rechner repräsentiert werden. Zwar sind Rundungsfehler bei doppelt genauer Repräsentation (mindestens zehn signifikante Stellen) meist nicht so schwerwiegend wie bei verminderter Genauigkeit, jedoch muß auch bei Verwendung doppeltgenauer Repräsentation streng darauf geachtet werden, daß sich Rundungsfehler nicht summieren oder durch Differenzbildung signifikant werden. Andernfalls führt beispielsweise eine Netzverfeinerung ab einer gewissen Knotenanzahl nicht mehr zu einer Verbesserung des Ergebnisses durch einen verringerten Diskretisierungsfehler, sondern zu einer Vergrößerung des Fehlers aufgrund kumulierter Rundungsfehler. So sind zum Beispiel die in dieser Arbeit verwendeten iterativen Verfahren zur Lösung großer linearer Gleichungssysteme weniger anfällig gegen Rundungsfehler als direkte Verfahren.

Eine weitere Fehlerquelle ist die praktisch immer unvollständige Konvergenz iterativer Verfahren beispielsweise zur Lösung linearer Gleichungssysteme und zur Linearisierung der nicht-linearen Terme der Ausgangsgleichungen. Durch die Ausführung weiterer Iterationen kann bei konvergenten Verfahren zu Lasten der Rechenzeit der Fehler durch unvollständige Konvergenz bis auf ein Niveau reduziert werden, auf dem Rundungsfehler signifikant werden. Bei konvergenten Verfahren kann die Änderung der Knotenvariablen über den Iterationsschritten der Abschätzung des verbleibenden Konvergenzfehlers dienen.

Diskretisierungsfehler entstehen auf mehreren Wegen. Zum einen ist die Ordnung der Ansatzfunktionen und deren Anzahl immer beschränkt; die berechneten Approximationen der gesuchten Feldgrößen stimmen im allgemeinen nicht mit den exakten Lösungen überein. Konsistente Verfahren erlauben etwa durch Netzverfeinerung eine Abschätzung des verbleibenden Diskretisierungsfehlers. Die Verteilung des Diskretisierungsfehlers gibt Hinweise darauf, wo eine Netzverfeinerung notwendig ist. Die Minimierung des Diskretisierungsfehlers erfolgt in der Regel empirisch: durch Vergleich der mit Hilfe eines groben und eines feineren Netzes gewonnenen Lösungen wird der Diskretisierungsfehler bestimmt und danach das Netz lokal verfeinert. Diese Prozedur wird solange wiederholt, bis keine relevante Lösungsänderung bei weiterer Netzverfeinerung mehr auftritt.

Desweiteren haben auch Form und Anordnung der Elemente Einfluß auf den Diskretisierungsfehler. So können stark verzerrte Elemente und stark unterschiedlich große benachbarte Elemente zu Fehlern in der Lösung führen.

Die bei finite Volumen Verfahren oft gestellte Forderung nach gering verzerrten oder rechtwinkligen Elementen [FP96, Kapitel 8.2.3] kann bei finite Elemente Verfahren durch die Wahl eines numerischen Elementintegrationsschemas höherer Ordnung zumindest stark abgeschwächt werden. Zur Abschätzung dieses Fehlers wird immer der Vergleich von Ergebnissen notwendig sein, die mit unterschiedlichen Vernetzungen derselben Geometrie gewonnen wurden.

Optimal, aber nur mit hohem Aufwand zu verwirklichen, ist die automatische Erzeugung adaptiver unstrukturierter Netze. Im Rahmen dieser Arbeit wurde für den eindimensionalen Fall die automatische Anpassung der Netze an den Lösungsverlauf und für den dreidimensionalen Fall die Erzeugung unstrukturierter dreidimensionaler Netze mit lokal vorgegebbarer Knotendichte verwirklicht (siehe auch Abschnitt 4.1.2).

Ein wesentlicher Anteil des Fehlers numerischer Verfahren wird oft durch eine stabilitätsverbessernde Diskretisierung bestimmter Terme verursacht (meist der Konvektionsterme in den Impulsbilanzgleichungen und der nichtlinearen Quellterme in den Gleichungen für die Turbulenzenergie und ihre Dissipation). So ist Stabilität oft auf Kosten der Genauigkeit erreichbar [Sch90]. Interne, wandgebundene Strömungen verlangen jedoch numerische Verfahren ohne falsche Diffusion [Vio87].

Sogenannte Aufwind-Diskretisierungen der Konvektionsterme führen auch auf groben Netzen und bei hohen Werten der Reynolds-Zahl zu stabilen Verfahren, aber auch zur Lösungsverfälschung [FP96], [HWN⁺94], bei kleinen Geschwindigkeitsbeträgen sogar bei Stromlinien-Aufwind-Verfahren zu erheblicher Lösungsverfälschung [Soh88]. Bei einfachen Aufwind-Diskretisierungen überdeckt der durch das numerische Verfahren eingebrachte diffusive Anteil leicht die durch Turbulenz bewirkte Änderung der effektiven Viskosität. Das Verfahren ist frei von numerischer Diffusion, falls die Galerkinsche finite Elemente-Methode ohne Aufwind-Verfahren verwendet wird [HSH87], [Smi84], aber damit auch numerisch schwieriger und bei hohen Werten der Reynolds-Zahl sogar instabil [TF91]. Es ist ebenfalls frei von numerischer Diffusion bei der Verwendung von Aufwind-Schemata dritter Ordnung [KTN91].

Um diese Art Diskretisierungsfehler auszuschalten, sollten zur endgültigen numerischen Berechnung der Lösung alle stabilitätsverbessernden Verfahren vermieden werden. Dazu ist der Wechsel von Diskretisierungen einzelner Terme möglichst zur Programmlaufzeit vorteilhaft, was in dieser Arbeit realisiert wurde. Zur Überprüfung des numerischen Verfahrens in Hinblick auf numerische Diffusion und Diskretisierungsfehler ist ein Vergleich der berechneten Ergebnisse mit exakten Lösungen notwendig (siehe Abschnitt 4.3).

4.2. Verfahren zur Effizienzsteigerung

Die gekoppelte Lösung des Systems partieller Differentialgleichungen ist heute nur für sehr einfache Systeme möglich [Sch90]. Ihre Entkopplung führt auf wesentlich kleinere Gleichungssysteme, deren Lösung sehr viel weniger rechenzeit- und speicherintensiv ist [RS86], [Sch90]. Mit der Entwicklung der Druckgleichung als Voraussetzung einer entkoppelten Betrachtung und der Berücksichtigung des Typs des Differentialgleichungssystems als Voraussetzung einer in einer Richtung fortschreitenden Lösung im ersten Kapitel sowie der getrennten Betrachtung und einer geeigneten Normierung der Gleichungen sind bereits wesentliche Bedingungen eines effizienten Simulationsverfahrens geschaffen.

4.2.1. Berechnung von Stoffwerten

Die Berechnung der Stoffwerte realer Fluide kann viel Rechenzeit kosten. Wie bei der Diskretisierung kann daher ein Wechsel von einfachen Annahmen wie konstanten Stoffwerten über realistischere lokale Taylorentwicklungen (in Druck und Temperatur) unterschiedlicher Ordnung, näherungsweise Berechnung der Stoffwerte mit rechenzeitorientierten, einfachen analytischen Beschreibungen bis hin zur Tabelleninterpolation der tatsächlichen Stoffwerte dazu beitragen, die Effizienz der Simulation zu verbessern.

Rechenzeitorientierte analytische Funktionen zur Darstellung der Stoffwertabhängigkeiten von Luft, Kohlendioxid, Helium im gasförmigen und Natrium im flüssigen Zustand wurden im Rahmen einer Diplomarbeit entwickelt [Ste96]. Die Funktionen geben die benötigten Stoffwerte Dichte, Wärmeausdehnung, dynamische und kinematische Viskosität, spezifische Wärmekapazität und Wärmeleitfähigkeit gut wieder und werden dieser Arbeit zugrundegelegt. Die Anpassung der analytischen Funktionen an die gemessenen Stoffwerte erfolgte dabei durch Minimierung der maximalen relativen Abweichung, da so sichergestellt werden kann, daß auch bei starker Variation der betrachteten Stoffwerte die relativen Fehler klein sind.

Die Anpassung gestaltet sich bei Wahl der mittleren quadratischen Abweichung als sogenannte Likelihood-Funktion einfacher, wenn einfache Funktionen wie beispielsweise Polynome als Ansatzfunktionen verwendet werden. Sie wird in dieser Arbeit nur bei der lokalen Taylorentwicklung der Stoffwertfunktionen benutzt, bei der die auftretenden Stoffwertvariationen klein sein sollten, die Wahl der mittleren quadratischen Abweichung als Likelihood-Funktion also zu vergleichbaren Abweichungen der angepaßten Funktionen führt wie die Wahl der maximalen relativen Abweichung.

Zur Berechnung der entsprechenden Stoffwerte von Wasser im flüssigen und dampfförmigen Zustand gelang eine voll befriedigende Anpassung mittels einfacher analytischer Funktionen nicht für alle Stoffwerte, so daß in dieser Arbeit auf ein ebenfalls in [Ste96] entwickeltes MATHEMATICA-Programm zur Erstellung fein aufgelöster Wertetabellen für die Stoffwerte leichten Wassers zurückgegriffen wurde, das die beispielsweise in [PW93] angegebene IAPS-Formulierung der Stoffwerte von Wasser benutzt.

Eine ebenfalls angewendete Möglichkeit zur Effizienzsteigerung auf Kosten des Speicherplatzes ist die Erstellung eines Materialwertefelds für alle Knoten bei Verwendung von Materialwertverläufen in Form der Elementansatzfunktionen.

4.2.2. Lösung der algebraischen Gleichungssysteme und Relaxation

Da die Lösung der algebraischen Gleichungssysteme bei allen oben diskutierten Diskretisierungsverfahren einen großen Teil der Rechenzeit und des Speicherbedarfs in Anspruch nimmt (bei der Methode der finiten Elemente nach [RRRA93] etwa 80 %), bestimmt die Auswahl geeigneter Algorithmen zur Lösung der Gleichungssysteme wesentlich die Effizienz des gesamten Simulationsverfahrens. Die zur Strömungsberechnung benötigte Rechenzeit setzt sich

fast allein aus den für den Gleichungssystemaufbau und die Lösung der linearen Gleichungssysteme benötigten Zeiten zusammen. Der Anteil der Rechenzeit, der zur Lösung der linearen Gleichungssysteme aufgewendet werden muß, ist stark von den verwendeten Algorithmen, den Vereinfachungen beim Gleichungssystemaufbau und auch der konkreten Implementierung abhängig. Er liegt bei den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen im Bereich von 40 bis 90 %.

Für die bei der Diskretisierung der dreidimensionalen Differentialgleichungen auftretenden sehr großen linearen Gleichungssysteme sind direkte Löser nicht ökonomisch, außer für dünnbesetzte Matrizen spezieller Struktur (beispielsweise nur wenige besetzte Diagonalen), die nur bei sehr einfach strukturierten Netzen auftreten. Der Hauptvorteil direkter Löser ist, daß ihre Konvergenzgeschwindigkeit von der Konditionszahl der auftretenden Matrizen nicht empfindlich abhängig ist [Sch93]. Durch Umnummerierung der Knotenvariablen ist eine Bandbreitenoptimierung der Matrix möglich, so daß direkte Verfahren für Bandmatrizen eingesetzt werden können. Dieser Weg ist jedoch für dreidimensionale Netze aufgrund der zu großen resultierenden Bandbreite nicht sinnvoll.

Ein Ziel der Diskretisierung muß die Bildung möglichst gut konditionierter Matrizen sein, da besser konditionierte Matrizen bei iterativen Verfahren zu einer höheren Konvergenzgeschwindigkeit und bei direkten Verfahren zu einer höheren Genauigkeit der erzielten Lösung führen [Sch91]. Eine gute Vorbereitung zur effizienten Lösbarkeit der resultierenden linearen Gleichungssysteme insbesondere mit iterativen Verfahren ist damit die durchgeführte Normierung aller Variablen auf etwa 10^0 , die zu gut skalierten Matrizen führt.

Die bei der Simulation des wandnahen Bereichs entstehenden Matrizen sind symmetrisch, von geringer Bandbreite (die Bandbreite ist gleich der Ordnung der verwendeten Elementansätze) und definit. Zur Lösung der linearen Gleichungssysteme werden daher spezielle direkte Lösungsverfahren verwendet: der Tridiagonal-Matrix-Algorithmus für symmetrische Matrizen bei linearen Elementansätzen und Cholesky-Verfahren für symmetrische definite Matrizen.

Eine weitere Möglichkeit zur Reduzierung der Bandbreite besteht darin, alle Terme der Matrix bis auf eine verbleibende Bandstruktur mit Hilfe der Lösung aus dem vorhergehenden Iterationsschritt auf die rechte Seite zu bringen (dem Konstantenvektor zuzuschlagen). So können wieder gegenüber der Konditionszahl unempfindlichere direkte Löser eingesetzt werden. Ein solches Vorgehen führt in der Regel zu langsamer Konvergenz, da bestimmte Kopplungen von Knotenvariablen eliminiert werden. Eine Verbesserung kann zwar durch mass lumping (siehe Abschnitt 4.2.3) erzielt werden, der Einsatz direkter Löser bleibt für komplexe dreidimensionale Fälle aber auf das Anfangsstadium des Lösungsalgorithmus beschränkt. Diese Möglichkeit zur Reduzierung der Bandbreite wird deshalb in dieser Arbeit nicht verwendet.

Für große Knotenzahlen ist die Verwendung von iterativen Verfahren notwendig, da sie dann eine sehr viel effizientere Lösung ermöglichen, insbesondere wenn eine exakte Lösung der Gleichungssysteme nicht erforderlich ist. Gerade zu Beginn der Berechnung ist aber eine exakte Lösung der algebraischen Gleichungssysteme gar nicht notwendig, da sich die Lösung im Verlauf der folgenden Picarditerationen ohnehin noch ändert.

In [FP96, Kapitel 5.7] wird für die Lösung der bei fluiddynamischen Problemen resultierenden linearen Gleichungssysteme für iterative Löser die folgende nach zunehmender Effizienz angeordnete Reihenfolge angegeben: Gauß-Seidel Verfahren, unvollständige LU-Zerlegung, Verfahren der (bi)konjugierten Gradienten mit Vorkonditionierung und deren stabilisierte Versionen. Die Verfahren der konjugierten Gradienten sind auch den SOR-Verfahren, selbst bei optimaler Wahl des Relaxationsfaktors, überlegen [Sch93, Kapitel 11].

Die Effizienz der Algorithmen zur Lösung der linearen Gleichungssysteme kann außer durch Änderung der Diskretisierung oder Modifikation der diskretisierten Gleichungen durch zwei weitere Verfahren verbessert werden.

Zum einen kann man dadurch, daß eine Unterrelaxation der Variablen nach Gleichung (4.6) nicht erst nach der Lösung erfolgt, sondern von vornherein berücksichtigt wird, die Diagonaldominanz der Matrizen verbessern, was sich auf viele iterative Verfahren positiv auswirkt. Dazu löst man das lineare Gleichungssystem $\underline{A} \underline{f}^{(n+1)} = \underline{b}$ nach $f_i^{(n+1)}$ auf, setzt den erhaltenen Ausdruck in Gleichung (4.6) ein und erhält, falls \underline{A} eine Diagonalmatrix ist, durch Umformung der resultierenden Gleichung ein lineares Gleichungssystem für $\underline{f}^{(n+1),\text{relax}}$ in der Form $\underline{A}' \underline{f}^{(n+1),\text{relax}} = \underline{b}'^{(n)}$ mit $A'_{ij} = A_{ij} + \delta_{ij} A_{ii} (1 - \omega)/\omega$ und $b'_i = b_i + A_{ii} f_i^{(n)} (1 - \omega)/\omega$. Für diagonaldominante Matrizen gilt die Gleichung für $\underline{f}^{(n+1),\text{relax}}$ näherungsweise – mit verschwindendem Fehler bei zunehmender Konvergenz. Dieses Verfahren erbrachte bei dem in dieser Arbeit entwickelten numerischen Verfahren keinen Effizienzvorteil und wurde deshalb zur Erzielung der angegebenen Simulationsergebnisse nicht eingesetzt.

Zum anderen kann eine sogenannte Vorkonditionierung durchgeführt werden. Dazu wird das lineare Gleichungssystem formal mit Hilfe einer einfach zu invertierenden Matrix, der Vorkonditionierungsmatrix, multipliziert. Die Vorkonditionierungsmatrix sollte möglichst gut mit der Inversen der Ausgangsmatrix übereinstimmen. Praktisch wird die Matrixmultiplikation bei Vorkonditionierung allerdings wegen des damit verbundenen Aufwands meist nicht durchgeführt, sondern die Vorkonditionierung direkt im Lösungsalgorithmus umgesetzt [BBC⁺94]. Bei symmetrischen Systemen erfolgt die Vorkonditionierung mit einer regulären Matrix, um die Symmetrie der Matrix zu erhalten.

Die Matrizen können trotz optimaler Normierung der Variablen nicht gut skaliert sein. Daher ist eine nachträgliche Skalierung der Matrizen dergestalt, daß alle Diagonalelemente gleich Eins werden, immer empfehlenswert. Sie nimmt zudem bei dünnbesetzten Matrizen wenig Rechenzeit in Anspruch. Den gleichen Effekt erreicht man auch durch Verwendung der Diagonalen als Vorkonditionierungsmatrix, der Jacobi-Vorkonditionierung. Bei den hier auftretenden sehr dünn besetzten Matrizen ist die Skalierung in der Regel effizienter als eine Jacobi-Vorkonditionierung und deren direkte Umsetzung im Lösungsalgorithmus. Sie kann außerdem auch mit anderen Vorkonditionierungsmethoden kombiniert werden.

Eine Vorkonditionierung erbringt bei der Lösung der im Gegensatz zu den aus der Druckgleichung resultierenden symmetrischen Gleichungssystemen kleinen asymmetrischen Gleichungssystemen der parabolisierten Differentialgleichungen keinen so großen Gewinn in der Gesamt-Rechenzeit. Als effizienteste Vorkonditionierungsmethode erwies sich für die im Rah-

men dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen die unvollständige LU-Zerlegung unter Beibehaltung der dünnbesetzten Matrixstruktur, die sogenannte ILU(0)-Vorkonditionierung.

Bei den sehr großen symmetrischen Gleichungssystemen, die bei der Lösung mit der Methode der konjugierten Gradienten viele Iterationen benötigen und damit offensichtlich nicht so gut konditioniert sind wie die asymmetrischen Gleichungssysteme, ist die Vorkonditionierung für die Effizienz des gesamten Verfahrens entscheidend. Als bei weitem effizientestes Verfahren zur Vorkonditionierung erwies sich dabei die Verwendung einer unvollständigen Cholesky-Zerlegung unter Beibehaltung der dünnbesetzten Matrixstruktur, also das symmetrische Pendant zur ILU(0)-Zerlegung.

Die Stabilität des gesamten Lösungsverfahrens wird oft durch die Relaxation der Feldgrößen wesentlich beeinflusst [FP96]. Liegt der Relaxationsfaktor ω bei der Relaxation der Form

$$f_i^{(n+1),\text{relax}} = f_i^{(n)} + \omega \left(f_i^{(n+1)} - f_i^{(n)} \right) = (1 - \omega) f_i^{(n)} + \omega f_i^{(n+1)} \quad (4.6)$$

zwischen 0 und 1, so spricht man von Unterrelaxation, für Relaxationsfaktoren größer als 1 von Überrelaxation. Mit starker Unterrelaxation kann man oft Stabilität erzwingen, allerdings auf Kosten der benötigten Rechenzeit [And95]. Optimale Werte der Relaxationsfaktoren müssen in der Regel empirisch bestimmt werden und sind oft empfindlich von den eingesetzten Diskretisierungen und Näherungen und den zu simulierenden Strömungsverhältnissen abhängig. Feldgrößen wie beispielsweise \tilde{k} und $\tilde{\varepsilon}$, für die Werte kleiner als Null nicht auftreten dürfen, erfordern bei der Relaxation zusätzlich eine Betragsbildung oder ein Nullsetzen der negativen Werte, falls die Diskretisierung nichtnegative Werte nicht garantiert.

Ein weiteres, zusätzlich implementiertes Verfahren ergibt sich durch die Begrenzung der maximalen oder der komponentenweise maximalen relativen Differenzennorm von altem zu neuem Feldgrößenvektor anstelle eines konstanten Relaxationsfaktors. Dadurch können bereits zu Beginn der Picarditeration große Relaxationsfaktoren verwendet werden, ohne daß es dadurch zu großen Änderungen der Feldgrößen kommt, die die Stabilität negativ beeinflussen würden. Die Effizienzverbesserung durch diese neue Methode ist allerdings sehr gering, so daß die im folgenden angegebenen Rechenergebnisse mit konstanten Relaxationsfaktoren erzielt wurden.

4.2.3. Modifikation der Diskretisierungen

Die numerische Simulation von Strömungen bei hohen Werten der Reynolds-Zahl führt zu Stabilitätsproblemen, die mit Hilfe geeigneter Modifikationen der Gleichungsdiskretisierungen behoben werden können.

Zum einen kann der Konvektionsterm in der Impulsbilanz zu Instabilitäten führen. Diese Instabilitäten können beispielsweise umgangen werden durch Netzverfeinerung, Aufwind-Verfahren oder die Anwendung der Methode der Charakteristiken zur Berechnung der Konvektion [Sch90]. Durch das in dieser Arbeit angewendete schrittweise Lösen der Impulsbilanz

in Strömungsrichtung werden Geschwindigkeitsknotenwerte nicht von den Werten stromabwärts gelegener Knoten beeinflusst, so daß diese Ursache für Instabilitäten eliminiert wurde. Dies ist neben dem Effizienzgewinn ein zweiter wesentlicher Vorteil der vorgenommenen partiellen Parabolisierung.

Bei turbulenten Strömungen und Anwendung der Galerkinschen Methode der finiten Elemente können außerdem durch die nichtlinearen Quellterme in den Transportgleichungen der Turbulenzfeldgrößen Instabilitäten verursacht werden. Sie können nach [HSH87], [Sch90] und [Smi84] umgangen werden durch Konstantsetzen oder Verwendung des Elementansatzes für den Quellterm (diese Maßnahme reicht nach [HSH87] allein und ist nach [Smi84] zwingend), sukzessive Einführung der nichtlinearen Quellterme, Einführung künstlicher Diffusion zu Beginn, Verwendung von Aufwind-Verfahren und Unterrelaxation.

Neben den Vereinfachungen von Termen (Abschwächung, Konstantsetzen, Veränderung der Diffusionskonstanten, Aufwind-Verfahren) können weitere Änderungen der diskretisierten Gleichungen wie beispielsweise die Diagonalisierung der Massenmatrix durch mass lumping

$$M_{ij}^{\text{lump}} = \delta_{ij} \sum_l M_{lj},$$

eingeführt werden. In der Auswirkung auf die Massenmatrix äquivalent, aber allgemeiner anzuwenden, ist die in [Sch86] benutzte Form des mass lumping, bei der der Ansatz $\sum_j \phi_j f_j$ der Feldvariablen f in der mit der Gewichtsfunktion ϕ_i gewichteten Gleichung durch $f_i \sum_j \phi_j$ substituiert wird. Für alle in dieser Arbeit verwendeten linearen Elementansatzfunktionen [Spe99] vereinfacht sich der Ansatz wegen $\sum_j \phi_j = 1$ zu $f_i \sum_j \phi_j = f_i$.

Die beschriebenen Maßnahmen verbessern zwar in der Regel die Stabilität, zerstören aber die Konsistenz des Verfahrens, wodurch auch die Möglichkeit einer Modellüberprüfung verloren geht, da sich die Abweichungen von experimentellen Ergebnissen aus der Summe von Modellunzulänglichkeiten und durch die Näherungen bewirkten Änderungen ergibt. Es ist daher unbedingt notwendig, zur endgültigen Lösungsberechnung wieder konsistente und eventuell weniger stabile Verfahren einzusetzen. Die Umschaltung von unterschiedlichen Diskretisierungen und Näherungen zusammen mit der Änderung der Relaxationsfaktoren und Abbruchschranken zur Programmlaufzeit ermöglichen erst ein stabiles und gleichzeitig effizientes und genaues Simulationsverfahren.

Es sind auch Modifikationen der Diskretisierungen möglich, die nicht die Konsistenz des Verfahrens beeinflussen, aber trotzdem völlig unterschiedliche Stabilitäts- und Konvergenzeigenschaften aufweisen. Im Verlauf der Untersuchungen hat sich gezeigt, daß den gewählten Diskretisierungen der Gleichungen eine zentrale Rolle für die Stabilität und Konvergenzgeschwindigkeit des gesamten Verfahrens zukommt. Viele effizienzsteigernde Maßnahmen können zudem erst dann zum Zug kommen, wenn die Diskretisierung dies zuläßt, beispielsweise durch eine nur geringe Einschränkung des Bereichs, in dem die Relaxationsparameter zu wählen sind, oder durch eine gute Konditionierung der resultierenden Matrizen.

Im folgenden werden zuerst die Diskretisierung der Modellgleichungen des wandnahen Bereichs behandelt und geeignete Diskretisierungsverfahren für die nichtlinearen und im wandnahen Bereich dominierenden Quellterme der Turbulenzmodellgleichungen vorgestellt. Da-

nach werden auch geeignete Diskretisierungsverfahren für die im Kernbereich zusätzlich auftretenden Terme behandelt, wie zum Beispiel die Konvektionsterme in den Impulsbilanzkomponentengleichungen. Dabei zeigt sich, daß die schrittweise Lösung der Impulsbilanz nicht nur Grundlage der Effizienz des gesamten Verfahrens ist, sondern zusätzlich die konsistente Diskretisierung der Impulsbilanz bei dominanter Konvektion ermöglicht.

Auch wenn bei der Berechnung des wandnahen Bereichs im Vergleich zur dreidimensionalen Simulation nur kleine algebraische Gleichungssysteme zu lösen sind, verbieten sich aus Gründen der Effizienz die gekoppelte Berechnung der Gleichungen und eine auf nichtlineare algebraische Gleichungssysteme führende Diskretisierung, da die Dämpfungsfunktionen und auch die unter Umständen starken Stoffwertvariationen ohnehin zu Picarditerationen und wiederholtem Lösen der einzelnen Gleichungen zwingen.

In Anhang B.1 wird das Verfahren zur Diskretisierung der eindimensionalen Modellgleichungen des wandnahen Bereichs beschrieben. Die Impulsbilanz (A.9) zur Bestimmung der dimensionslosen Geschwindigkeit ist, da der Konvektionsterm entfällt, linear in u^+ und entspricht schon der in Gleichung (B.1) geforderten Form. Eine Relaxation der Werte für u^+ ist nicht erforderlich und erbringt auch keinen Rechenzeitgewinn.

Dadurch, daß die turbulente Viskosität proportional zum Quadrat der dimensionslosen Turbulenzenergie ist und auch f_r sowie f_μ von k^+ abhängig sind, ist die Gleichung (A.10) zur Bestimmung von k^+ nichtlinear. Auch die Gleichung (A.11) zur Bestimmung der dimensionslosen turbulenten Dissipation ist nichtlinear, da die turbulente Viskosität, die Dämpfungsfunktionen und der Dissipationsterm nichtlinear in ε^+ sind.

Entnimmt man den Wert der turbulenten Viskosität und die anderen nichtlinearen Terme der Lösung des vorhergegangenen Iterationsschritts, so ergeben sich zu Beginn der Picarditeration für die Werte von k^+ und ε^+ unter Umständen negative Werte. Bei Verwendung sehr kleiner Relaxationsfaktoren für die Werte von k^+ und ε^+ (kleiner als 0.01) und durch Betragbildung der relaxierten Werte wird das Verfahren zwar stabil, das System aus Impulsbilanz und Turbulenzfeldgrößentransportgleichungen konvergiert aber wegen der kleinen Relaxationsfaktoren nur sehr langsam.

Da bei dreidimensionalen Strömungsberechnungen unter Verwendung einer wandnahen Modellierung die Berechnung des wandnahen Bereichs sehr oft vorgenommen werden muß (maßgeblich ist das Produkt aus Wandknotenanzahl und Anzahl der Iterationen des dreidimensionalen Verfahrens), ist die Effizienz des oben beschriebenen Vorgehens nicht ausreichend.

Zur Verbesserung der Effizienz wurden die nichtlinearen Terme, wie im folgenden beschrieben, besser approximiert. Weiteres Ziel einer verbesserten Diskretisierung war es, nur nichtnegative Werte für die Turbulenzfeldgrößen zu erhalten, auch wenn nur eine grobe Näherungslösung vorhanden ist, und die Diagonaldominanz der resultierenden Matrizen der linearen Gleichungssysteme zu verbessern.

Zur Linearisierung der Transportgleichungen für k^+ und ε^+ ist es auf jeden Fall erforderlich, die turbulenten Viskositäten und die Dämpfungsfunktionen, deren Verlauf von der gewählten Modellierung abhängig ist, der Lösung des vorhergegangenen Iterationsschritts zu entnehmen.

Der Dissipationsterm in der Gleichung für k^+ kann vom Betrag her sehr groß werden und verursacht so negative Werte der Turbulenzenergie. Will man wie bei der Behandlung der turbulenten Viskositäten k^{+2}/ε^+ der Lösung des vorhergegangenen Iterationsschritts entnehmen, kann man formal den Dissipationsterm $\rho^*\varepsilon^+$ umschreiben in $\check{\rho}^*(\check{\varepsilon}^+/\check{k}^{+2})k^{+2}$, wobei die mit einem Dach versehenen Variablen der Lösung des vorhergehenden Iterationsschritts entnommen werden. Die damit eingeführte Nichtlinearität kann durch eine Taylorentwicklung erster Ordnung des nichtlinearen Terms k^{+2} um \check{k}^+ oder, äquivalent dazu, durch Vernachlässigung von $(\check{k}^+ - k^+)^2$ behoben werden:

$$k^{+2} = 2k^+\check{k}^+ - \check{k}^{+2} + (\check{k}^+ - k^+)^2 \approx 2k^+\check{k}^+ - \check{k}^{+2}.$$

Der vernachlässigte Term verschwindet mit zunehmender Konvergenz.

Insgesamt entspricht dieses Vorgehen dem Ersetzen des Dissipationsterms $\rho^*\varepsilon^+$ durch den Ausdruck $-\check{\rho}^*\check{\varepsilon}^+ + 2\check{\rho}^*(\check{\varepsilon}^+/\check{k}^+)k^+$. Auf diese Weise wird zum einen erreicht, daß der vorher negative Anteil des Dissipationsterms am Konstantenvektor \underline{b} des linearen Gleichungssystems in einen positiven Anteil gleichen Betrags umgewandelt wird, und zum anderen, daß die diskretisierte Form des zweiten Anteils des umgewandelten Dissipationsterms, zumindest bei Verwendung linearer Elementansätze, die Diagonaldominanz der Matrix des linearen Gleichungssystems verbessert, ohne daß die Konsistenz des Verfahrens beeinflußt wird.

Bei der Transportgleichung der turbulenten Diffusion kann das Verfahren analog auf Produktions- und Dissipationsterm angewendet werden: der positive Anteil wird weiterhin der Lösung des vorhergegangenen Iterationsschritts entnommen und geht somit in den Konstantenvektor \underline{b} des linearen Gleichungssystems ein. Im negativen Term wird der nichtlineare Term ε^{+2} wie oben dargestellt entwickelt. Wieder kehrt der negative Anteil, der in den Konstantenvektor eingeht, sein Vorzeichen um und der zu ε^+ proportionale Anteil führt zu einer Verbesserung der Diagonaldominanz der Matrix des linearen Gleichungssystems, ohne daß die Konsistenz des Verfahrens beeinflußt wird.

Eine Veränderung der Quellterme, die ebenfalls nichtnegative Werte für die Turbulenzfeldgrößen verhindert und die Diagonaldominanz der resultierenden Matrizen der linearen Gleichungssysteme verbessert, ist in [Sch86] beschrieben. Da die Veränderungen auf Ebene der diskretisierten Gleichungen und durch Verwendung des mass lumping vorgenommen werden, bleibt die Konsistenz des Verfahrens im Gegensatz zu dem in dieser Arbeit entwickelten Vorgehen nicht erhalten.

Die beschriebenen Modifikationen führen zusammen dazu, daß die Lösungen für k^+ und ε^+ schon zu Beginn der Picarditeration praktisch ausschließlich positive Werte liefern und eine einmalige Lösung der Gleichungen bei jeder Picarditeration über die Gleichungen (A.9) bis (A.11) ausreichend ist. Es ist außerdem keine Relaxation mehr erforderlich, wodurch sich die notwendige Rechenzeit um mehr als eine Größenordnung reduziert. Eine Änderung der Relaxationsfaktoren (das Verfahren bleibt auch bei mäßiger Überrelaxation stabil !) kann zwar eine Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit bewirken, die Werte der optimierten Relaxationsfaktoren sind aber von Rechenfall zu Rechenfall verschieden. In allen im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen des wandnahen Bereichs konnten die Relaxationsfaktoren für k^+ und ε^+ zu Eins gesetzt werden.

Die Energiebilanzgleichung (A.12) für den wandnahen Bereich ist lediglich durch die Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte nichtlinear. Der zur ersten Ableitung der dimensionslosen Temperatur proportionale Term der Gleichung (A.12) führt bei impliziter Behandlung auf asymmetrische Matrizen. Da der Term im allgemeinen zudem klein ist – er verschwindet bei konstanten Stoffwerten – kann er, ohne daß die Effizienz darunter leidet, explizit behandelt werden, das heißt es werden die notwendigen Werte der Lösung des vorhergehenden Iterationsschritts entnommen und das Ergebnis geht nur in den Konstantenvektor ein. Der zur dimensionslosen Temperatur proportionale Term der Gleichung (A.12) ist ebenfalls in der Regel klein gegen die anderen Terme, so daß er ebenfalls explizit diskretisiert werden könnte, was aber keinen Effizienzvorteil bietet.

Die aus den oben beschriebenen Diskretisierungen der Modellgleichungen für den wandnahen Bereich resultierenden algebraischen Gleichungen werden im Anhang B.1 wiedergegeben.

Eigene Untersuchungen mit linearen, quadratischen und kubischen Elementansätzen, numerischen Integrationsschemata bis zur neunten Ordnung und unterschiedlichen Abbruchkriterien haben ergeben, daß eine Kombination aus linearen Elementansätzen, numerischer Integration erster Ordnung und der Maximumnorm der Differenz der Lösungen aufeinanderfolgender Iterationsschritte als Abbruchkriterium ausreichend und bezüglich der Effizienz unter den möglichen Kombinationen am besten ist. Lediglich bei sehr hohen Genauigkeitsanforderungen auch für abgeleitete Größen (Fehler deutlich unter 1 % auch für die Flußdichten \dot{q}_k und \dot{q}_ε) sollte ein Integrationsschema dritter Ordnung gewählt werden. Eine Änderung der berechneten Wandschubspannungsgeschwindigkeit wird dadurch nicht bewirkt.

Vor allem durch die beschriebenen Verfahren zur Verbesserung der Diskretisierungen konnte eine enorme Steigerung der Effizienz bei der Berechnung von wandnahen Strömungen erreicht werden. Einschließlich automatischer Netzaaption und Renormierung, die erforderlich ist, weil sich die Wandschubspannungsgeschwindigkeit u_τ und die Temperaturdifferenz ΔT und damit die Werte der Dämpfungsfunktionen in der Regel während der Berechnung ändern, wird bei 25 Knoten im wandnahen Bereich, numerischer Integration erster Ordnung, Verwendung konstanter Stoffwerte und einer maximalen relativen Änderung der Feldgrößen von 10^{-3} als Abbruchkriterium auf einem einfachen PC (133 MHz Prozessor- und 66 MHz Bus-takt) eine Rechengeschwindigkeit von 50 Simulationen des wandnahen Bereichs pro Sekunde bei unterschiedlichen Randbedingungen erreicht.

Ähnliche Randbedingungen, wie sie bei benachbarten Knoten in dreidimensionalen Simulationen die Regel sind, werden vom Simulationsmodul für den wandnahen Bereich erkannt und es wird dann das Ergebnis der vorhergehenden Berechnung des wandnahen Bereichs als Ausgangspunkt der neuen Simulation verwendet, wodurch die Rechengeschwindigkeit noch einmal etwa um den Faktor zwei gesteigert wird.

Die zeitabhängige Lösung stationärer Probleme ist meist instabiler als deren direkte Lösung [Fer87]. Weil weiterhin eine direkte Lösung mit nur einmaligem Aufstellen der algebraischen Gleichungen bei variablen Stoffwerten (realen Fluiden) aufgrund der dadurch bedingten impliziten Nichtlinearitäten nicht möglich ist, werden die dimensionslosen Gleichungen des Kernbereichs in dieser Arbeit in ihrer stationären linearisierten Form gelöst. Anstelle des

Systems partieller Differentialgleichungen werden Gleichungsgruppen oder einzelne Gleichungen betrachtet, da die numerische Lösung dann effizienter erfolgen kann und Änderungen der Gleichungen sowie zusätzliche Gleichungen leichter implementiert werden können.

Das Verfahren zur Diskretisierung der Gleichungen des Kernbereichs wird in Anhang [B.2](#) beschrieben. Der in der Impulsbilanz auftretende Konvektionsterm führt aus den oben genannten Gründen zu keiner Instabilität und Quellterme werden in gleicher Weise modifiziert wie bei den Gleichungen des wandnahen Bereichs.

4.3. Verifikation des numerischen Verfahrens

Die Verifikation anhand dreidimensionaler laminarer Strömungen ist Inhalt des ersten Abschnitts. Da in allen untersuchten Fällen exakte Lösungen für die eingelaufene und Näherungslösungen für die einlaufende laminare Strömung zur Verfügung stehen und so Abweichungen zwischen exakter und berechneter Lösung aufgrund von Modellunzulänglichkeiten ausgeschlossen sind, eignen sich die laminaren Strömungsfälle besonders zur Verifikation des numerischen Verfahrens.

4.3.1. Laminare Strömung zwischen zwei ebenen Platten

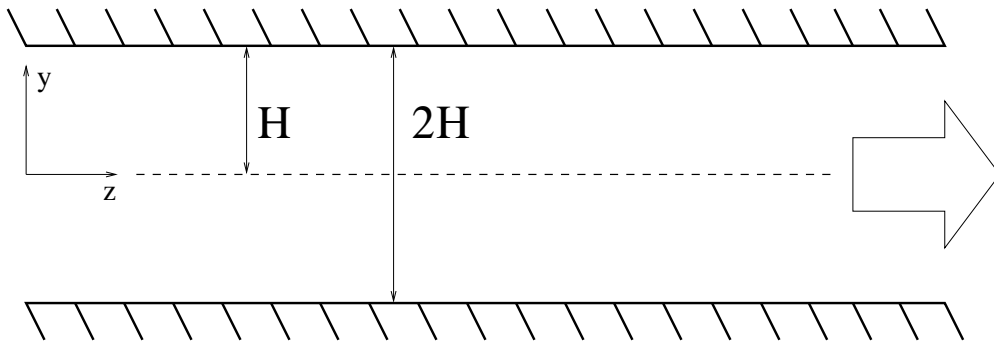


Abbildung 4.1.: Kanalgeometrie der parallelen, ebenen Platten im Längsschnitt

Da die laminare Strömung zwischen zwei ebenen Platten zweidimensional ist, sind an den gewählten dreidimensionalen Ausschnitt entsprechende Symmetrierandbedingungen zu stellen. Es ist zwar nicht notwendig, einen dreidimensionalen Ausschnitt zu wählen, anhand des Ergebnisses lassen sich durch nicht identisch verschwindende Geschwindigkeitskomponenten in x -Richtung (siehe [Abbildung 4.1](#)) aber leicht Fehler des numerischen Verfahrens erkennen.

Für die entwickelte Strömung sind sowohl das exakte Geschwindigkeitsprofil

$$\underline{v}(y) = v_z \underline{e}_z \quad \text{mit} \quad v_z(y) = \frac{3}{2} v_b \left(1.0 - (y/H)^2 \right),$$

wobei v_b die mittlere Geschwindigkeit ist, als auch der Druckverlustbeiwert

$$\lambda_f = -\frac{\partial p}{\partial z} \frac{d_h}{\frac{\rho}{2} v_b^2} = \frac{96}{\text{Re}}$$

mit der Reynolds-Zahl $\text{Re} = v_b d_h / \nu$ und dem hydraulischen Durchmesser $d_h = 4F/U = 4H$ und damit der Druckverlust

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \lambda_f \frac{\rho}{2} v_b^2 \frac{1}{d_h} = \frac{3 v_b \mu}{H^2}$$

bekannt (siehe beispielsweise [Jis82] und [SB87]). Auch die Nußelt-Zahl bei konstantem Wärmestrom der Wände ist für die entwickelte Strömung zu

$$\text{Nu} = \frac{\dot{q}_w d_h}{\lambda (T_w - T_m)} = \frac{140}{17}$$

mit der mittleren Temperatur $T_m = \int_0^H v_z T dy / \int_0^H v_z dy$ bestimmt worden [SB87].

Für die einlaufende Strömung wird in [SB87] eine Näherungslösung des Strömungsfelds angegeben. Am Kanaleintritt wird dabei ein gleichförmiges Geschwindigkeitsprofil zugrunde gelegt. Die Entwicklung der auf die mittlere Geschwindigkeit v_b bezogenen Zentralgeschwindigkeit ist eine universelle vom Wert der Reynolds-Zahl unabhängige Funktion der dimensionslosen Koordinate $z/(\text{Re} d_h)$. Bei $z/(\text{Re} d_h) = 0.011$ erreicht die Zentralgeschwindigkeit 99 % des Endwerts von $3 v_b/2$.

ρ	$= 1.20 \text{ kg/m}^3$	v_b	$= 0.1 \text{ m/s}$
ν	$= 1.50 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$	H	$= 0.0075 \text{ m}$
c_p	$= 1006.8 \text{ J/(kg K)}$	d_h	$= 0.03 \text{ m}$
β	$= 0.0034 \text{ 1/K}$	L	$= 0.15 \text{ m}$
λ	$= 0.026 \text{ W/(m K)}$	Re	$= 200.0$
Pr	$= 0.697$	Pé	$= 139.4$

Tabelle 4.1.: Materialwerte des Fluids und charakteristische Größen der berechneten laminaren Strömung zwischen zwei ebenen Platten

Für die in Tabelle 4.1 angegebenen charakteristischen Werte wurde eine Berechnung der laminaren Strömung für trockene Luft unter Umgebungsbedingungen und mit konstanten Stoffwerten durchgeführt.

Quer zur Strömungsrichtung wurden 25 Quaderelemente gleicher Größe zur Vernetzung gewählt (siehe Abbildung 4.2, Symmetrieränder sind gestrichelt eingezeichnet, Wände durchgezogen). Es wurde eine exponentielle axiale Einteilung der 35 Netzebenen so gewählt, daß die Netzebenenendichte zum Eintritt hin zunimmt (siehe Abbildung 4.3), da dort die größten axialen Gradienten des Strömungsfelds auftreten. Das Netz setzt sich aus 850 rechtwinkligen Quaderelementen zusammen und besitzt 1820 Knoten. Das maximale Verhältnis der Abmessungen eines Elements beträgt 39.7. Die Elementvolumina differieren um einen Faktor

von maximal 6.97, die benachbarter Elemente um einen Faktor von maximal 1.06. Das Netz besitzt damit bis auf die Streckung einzelner Elemente aus numerischer Sicht eine günstige Topologie.

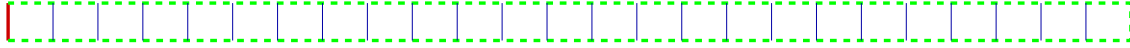


Abbildung 4.2.: Vernetzung des Kanalquerschnitts für die Berechnung der laminaren Strömung zwischen zwei Platten (Symmetrielinien gestrichelt)

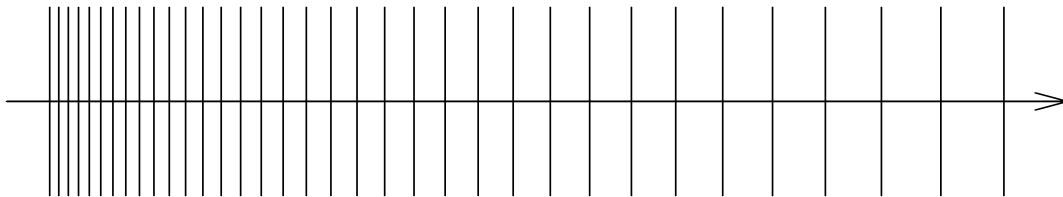


Abbildung 4.3.: Axiale Lage der Netzebenen für die Berechnung der laminaren Strömung zwischen zwei Platten

Mit Werten der Relaxationsfaktoren von 0.8 für den Druck, 0.2 für die Geschwindigkeit und 1.0 für die Temperatur konnten die Maximumnormen der Residuen und Differenzen innerhalb von 95 Iterationen um mehr als drei Größenordnungen reduziert werden. Abbildung 4.4 ist zu entnehmen, daß die Maximumnorm der Residuen und Differenzen um etwa dreizehn Größenordnungen bis auf Rundungsfehler abnimmt.

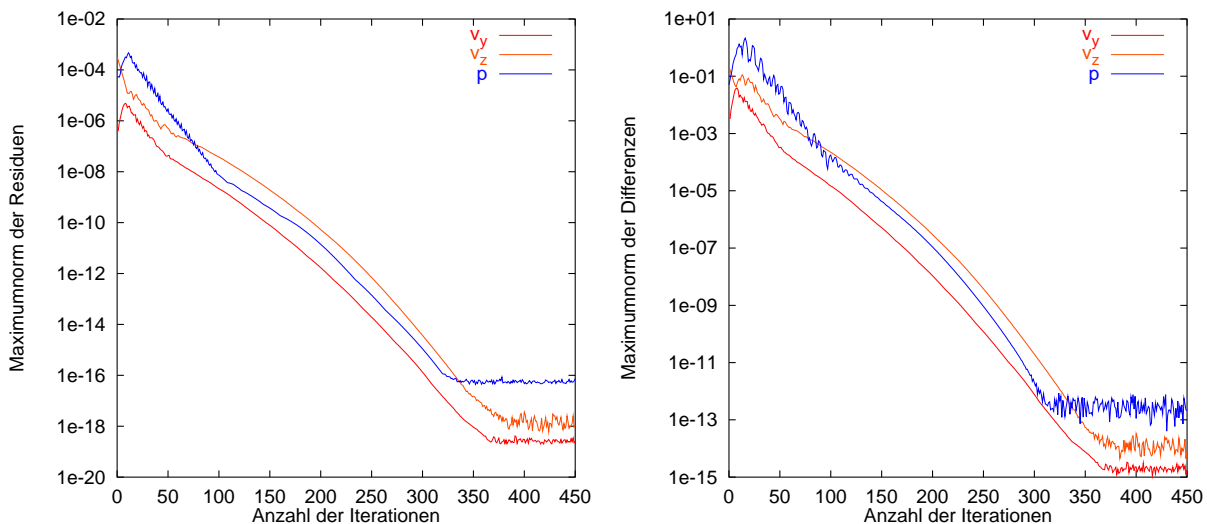


Abbildung 4.4.: Verlauf der Residuen- und Differenzennorm für die Simulation der laminaren Strömung zwischen zwei Platten

Wie Abbildung 4.5 zeigt, stimmt das berechnete Geschwindigkeitsfeld am Kanalaustritt sehr gut mit der exakten Lösung für die entwickelte Strömung überein. Auch die berechneten Werte für den Druckverlust und die Nußelt-Zahl am Kanalaustritt ($-96.32 \cdot 10^{-3}$ Pa/m und 8.237)

stimmen hervorragend mit den exakten Werten der entwickelten Strömung ($-96.0 \cdot 10^{-3}$ Pa/m und 8.235) überein. Da in dieser Arbeit im Fall laminarer Strömungen die Geschwindigkeitswerte an der Wand auch am Eintritt zu Null gesetzt werden, um eine phänomenologisch unsinnige Vorgabe der Randbedingungen und numerische Probleme bei der Bestimmung des Druckwertes an den Wandknoten im Eintritt zu vermeiden, fällt die Geschwindigkeit über das wandnächste Element von dem vorgegebenen Eintrittswert auf Null. Um die geforderte mittlere Geschwindigkeit im Eintritt zu erreichen, muß daher die vorgegebene Kerngeschwindigkeit etwas größer als die mittlere Geschwindigkeit sein. Aus diesem Grund ist auch die in Abbildung 4.5 dargestellte Geschwindigkeit im Kanalzentrum im Eintritt etwas größer als die mittlere Geschwindigkeit.

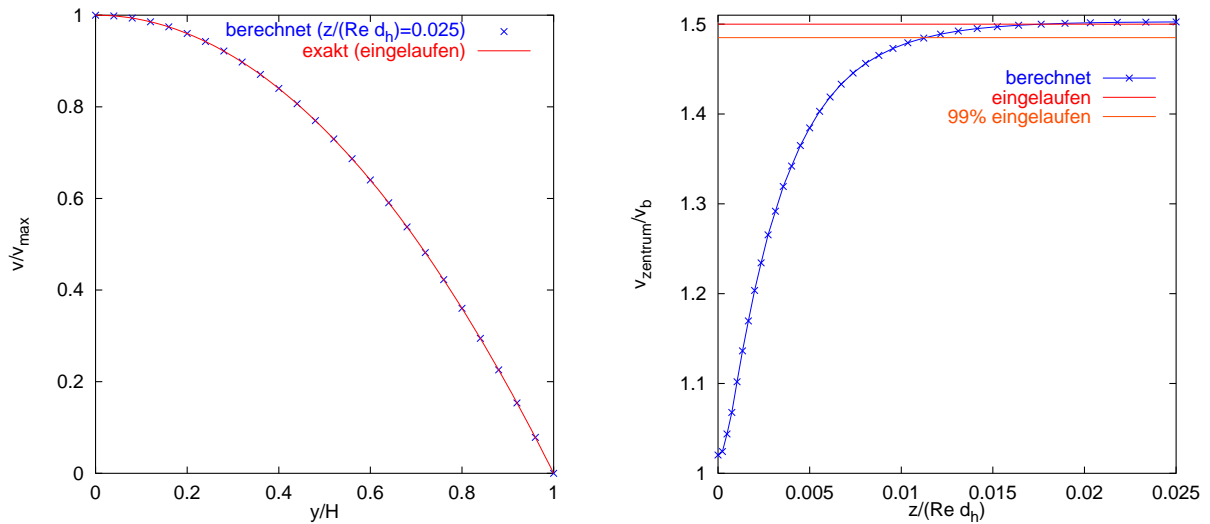


Abbildung 4.5.: Exaktes und berechnetes Geschwindigkeitsprofil bei $z/(Re d_h) = 0.025$ und berechnetes axiales Geschwindigkeitsprofil im Zentrum der laminaren Strömung zwischen zwei Platten

Daß der Druckverlust so genau bestimmt werden konnte, obwohl er 6 Größenordnungen unterhalb des mittleren Drucks von 1 bar oder 10^5 Pa liegt, ist Folge der geeignet gewählten Normierung der Gleichungen. Für Berechnungen mit variablen Stoffwerten muß auch der mittlere Druck mit dem tatsächlichen Druck übereinstimmen. Das Problem läßt sich dann nicht mehr durch eine Reduzierung des gesamten Druckniveaus, die im Fall konstanter Stoffwerte möglich ist, umgehen. Der Nachweis der Eignung der Normierung für solche Fragestellungen ist damit erbracht.

Die Entwicklung des Geschwindigkeitsprofils, der axiale Druckverlauf und die Entwicklung der Nußelt-Zahl sind plausibel und stimmen mit den in [SB87] angegebenen Näherungslösungen gut überein. Die Zentralgeschwindigkeit erreicht 99 % des Endwerts von $3 v_b/2$ bei $z/(Re d_h) \approx 0.011$ (siehe Abbildung 4.5), genau dem durch die Näherungslösung vorhergesagten Wert, obwohl die Kurve in diesem Bereich sehr flach verläuft und die Näherungslösung mit einem Fehler nicht bekannter Größe behaftet ist.

Der Druckverlauf ist bei eingelaufener Strömung linear. Die einlaufende Strömung zeigt einen zusätzlichen Druckverlust, den sogenannten Beschleunigungsdruckverlust. Der Druck ist in

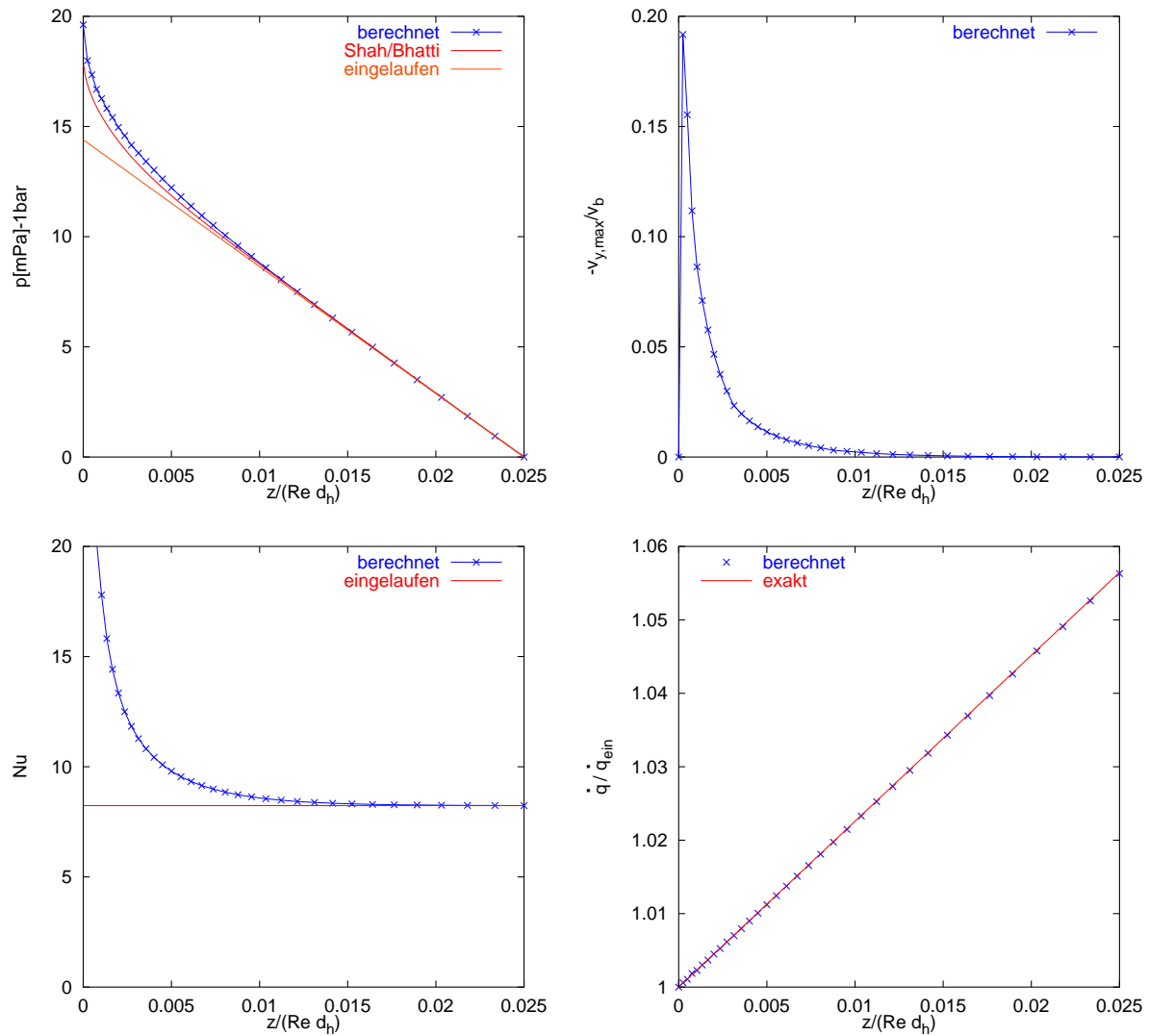


Abbildung 4.6.: Axialer Verlauf des mittleren Drucks p , der maximalen Quergeschwindigkeitskomponente $-v_{y,max}$, der Nußelt-Zahl Nu und der mittleren Energiestromdichte \dot{q} der laminaren Strömung zwischen zwei Platten

der Nähe des Eintritts auch nicht mehr über den Querschnitt konstant. Wie Abbildung 4.6 zeigt, liegt der Verlauf des über den Querschnitt gemittelten Drucks nahe an der in [SB87] angegebenen Näherungslösung.

Der für $\dot{q}_w = 100 \text{ W/m}^2$ bestimmte Wert der Nußelt-Zahl nimmt mit einlaufender Strömung ab, da die bei einlaufender Strömung vorhandenen Geschwindigkeitskomponenten in negative y -Richtung mit zunehmender Entwicklung des Geschwindigkeitsfelds abnehmen (siehe Abbildung 4.6).

Zur Bestimmung der Ordnung des gewählten numerischen Verfahrens ist die Untersuchung der Abhängigkeit der Lösung von der Netzfeinheit notwendig. Bei hinreichend feinen Netzen ist der Diskretisierungsfehler proportional zur Größe der Elemente hoch der Ordnung des Verfahrens [FP96, Kapitel 3.10]. Die Ordnung kann daher bei feinem Netz sowohl mit Hilfe

von zwei unterschiedlich feinen Netzen und der Kenntnis der exakten Lösung als auch mit Hilfe von drei unterschiedlich feinen Netzen ohne Kenntnis der exakten Lösung bestimmt werden.

Hier wurde die Bestimmung der Ordnung des Verfahrens durchgeführt für die eingelaufene Strömung des oben beschriebenen Strömungsfalls, da dafür die exakte Lösung bekannt ist. Das Programm wurde daher um die Möglichkeit der Berechnung eingelaufener Strömungen ergänzt.

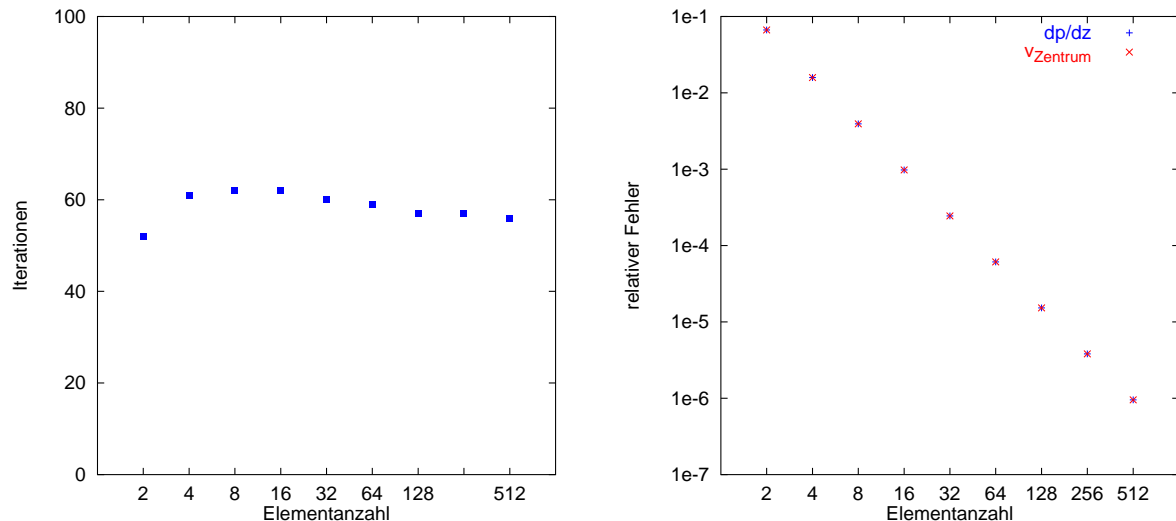


Abbildung 4.7.: Anzahl der notwendigen Picarditerationen und relative Abweichung von der exakten Lösung (Diskretisierungsfehler) in Abhängigkeit der Anzahl radialer Elemente

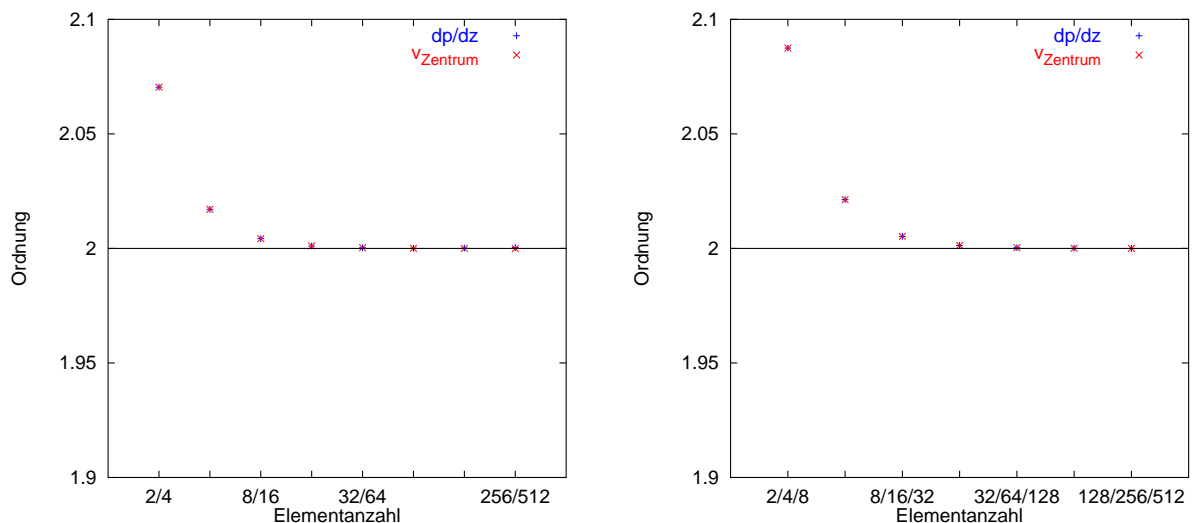


Abbildung 4.8.: Ordnung des Diskretisierungsverfahrens für den Druckverlust und die Zentralgeschwindigkeit bestimmt mit (links) und ohne (rechts) Hilfe der exakten Lösung

Die Rechnungen konvergierten ohne Ausnahme gut, wenn die Relaxationsfaktoren für die Geschwindigkeitskomponenten und den Druck zu 1 gesetzt wurden. Bei den Rechnungen wurde die Anzahl der Elemente in radialer Richtung bei 2 beginnend jeweils verdoppelt. Die Anzahl der zum Erreichen des Konvergenzzieles – Maximumnorm der dimensionslosen Differenzen kleiner als 10^{-10} – notwendigen Picarditerationen liegt in allen Fällen bei etwa 60, wie Abbildung 4.7 zu entnehmen ist. Die in der gleichen Abbildung dargestellte Abhängigkeit der relativen Abweichung der Ergebnisse von der exakten Lösung gibt schon bei groben Netzen gut die exponentielle Abhängigkeit des Diskretisierungsfehlers von der Netzfeinheit wieder. Die relativen Fehler in Druck und Geschwindigkeit liegen ausnahmslos sehr eng zusammen.

Abbildung 4.8 zeigt die mit Hilfe von zwei Netzen und der exakten Lösung sowie die mit Hilfe von drei Netzen berechneten Ordnungen des Diskretisierungsfehlers in der Geschwindigkeit und dem Druck. Der Diskretisierungsfehler ist sowohl für die Geschwindigkeit als auch für den Druck von zweiter Ordnung. Bereits sehr grobe Netze erlauben die Bestimmung der Ordnung des Fehlers, und die Ordnung des Diskretisierungsfehlers von Druck und Geschwindigkeit läßt sich auch ohne Kenntnis der exakten Lösung gut bestimmen.

4.3.2. Laminare Strömung durch ein Kreisrohr

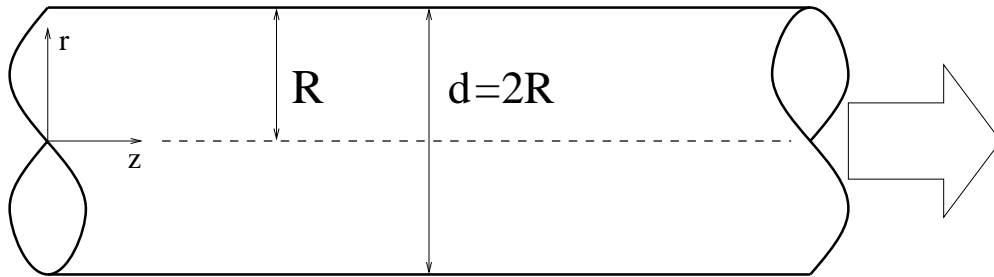


Abbildung 4.9.: Kanalgeometrie des Kreisrohrs

Die laminare Durchströmung eines Kreisrohrs (siehe Abbildung 4.9) ist wie die laminare Strömung zwischen zwei Platten zweidimensional. Wiederum wäre es nicht notwendig, einen dreidimensionalen Ausschnitt zu wählen; anhand des Ergebnisses lassen sich durch nicht identisch verschwindende Geschwindigkeitskomponenten in Umfangsrichtung aber leicht Fehler des numerischen Verfahrens erkennen. Außerdem soll an diesem Fall die Funktionsfähigkeit der unstrukturierten Vernetzung und der Berechnung auf Netzen mit unterschiedlichen Elementtypen demonstriert werden.

Für die entwickelte Strömung sind sowohl das exakte Geschwindigkeitsprofil

$$\underline{v} = \underline{v}(r) = v_z(r) \underline{e}_r \quad \text{mit} \quad v_z(r) = 2 v_b \left(1.0 - (r/R)^2\right)$$

mit der über den Querschnitt gemittelten Geschwindigkeit v_b , als auch der Druckverlustbeiwert

$$\lambda_f = -\frac{\partial p}{\partial z} \frac{d_h}{\frac{\rho}{2} v_b^2} = \frac{64}{\text{Re}}$$

mit der Reynolds-Zahl $Re = v_b d_h / \nu$ und dem hydraulischen Durchmesser, der mit dem Rohrdurchmesser identisch ist, und damit der Druckverlust

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \lambda_f \frac{\rho}{2} v_b^2 \frac{1}{d_h} = \frac{32 v_b \mu}{d_h^2}$$

bekannt [Jis82], [SB87]. Die Nußelt-Zahl bei konstantem Wärmestrom der Wände ist für die entwickelte Strömung zu

$$Nu = \frac{\dot{q}_w d_h}{\lambda (T_w - T_m)} = \frac{48}{11}$$

mit der mittleren Temperatur $T_m = \int_0^R v_z T r dr / \int_0^R v_z r dr$ bestimmt worden [SB87].

Für den Fall eines gleichförmigen Geschwindigkeitsprofils am Rohreintritt wird in [SB87] eine Näherungslösung für das einlaufende Strömungsfeld angegeben. Die Entwicklung der auf die mittlere Geschwindigkeit v_b bezogenen Zentralgeschwindigkeit ist dabei eine universelle vom Wert der Reynolds-Zahl unabhängige Funktion der dimensionslosen Koordinate $z/(Re d_h)$. Bei $z/(Re d_h) = 0.0565$, also deutlich später als für eine laminare Strömung zwischen zwei ebenen Platten bei gleicher Reynolds-Zahl und gleichem hydraulischen Durchmesser, erreicht die Zentralgeschwindigkeit 99 % des Endwerts von $2 v_b$.

ρ	$= 1.20 \text{ kg/m}^3$	v_b	$= 0.1 \text{ m/s}$
ν	$= 1.50 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$	R	$= 7.5 \text{ mm}$
c_p	$= 1006.8 \text{ J/(kg K)}$	d_h	$= 0.015 \text{ m}$
β	$= 0.0034 \text{ 1/K}$	L	$= 0.15 \text{ m}$
λ	$= 0.026 \text{ W/(m K)}$	Re	$= 100.0$
Pr	$= 0.697$	$Pé$	$= 69.7$

Tabelle 4.2.: Materialwerte des Fluids und charakteristische Größen der berechneten laminaren Rohrströmung

Für die in Tabelle 4.2 angegebenen charakteristischen Werte wurde eine Berechnung der laminaren Rohrströmung für trockene Luft unter Umgebungsbedingungen und konstanten Stoffwerten durchgeführt.

Die Vernetzung des Rohrquerschnitts erfolgte mit Quaderelementen parallel zu Wänden und Symmetrieebenen und unstrukturiert mit Prismenelementen im Inneren (siehe Abbildung 4.10). Wie in Abbildung 4.11 dargestellt, wurde axial wieder eine exponentielle Verteilung der 35 Netzebenen mit zum Austritt zunehmendem Ebenenabstand gewählt. Das Netz enthält 5530 Knoten, 1224 Quaderelemente und 7004 Prismenelemente. Die Volumina der Elemente unterscheiden sich um einen Faktor von maximal 33.93, die Volumina benachbarter Elemente um maximal den Faktor 1.826. Durch die Netzoptimierung (Vermeidung sehr spitzer oder stumpfer Elementinnenwinkel) konnte erreicht werden, daß nur Elementinnenwinkel im Bereich von 36.1° bis 138.6° auftreten. Über den Querschnitt ist das Netz relativ grob und aufgrund der vergrößerten Netzebenenabstände zum Austritt ergibt sich ein maximales Verhältnis der Abmessungen eines Elements von 77.4.

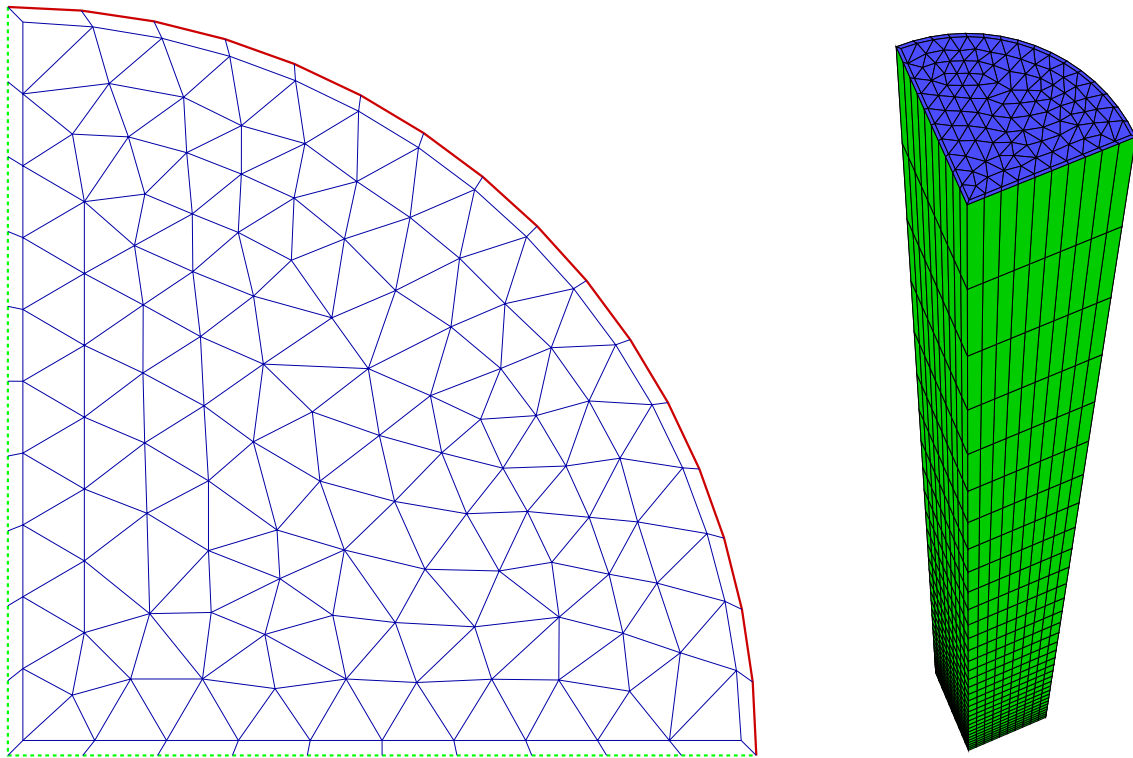


Abbildung 4.10.: Vernetzung des Kreisrohrs für die Berechnung der laminaren Strömung

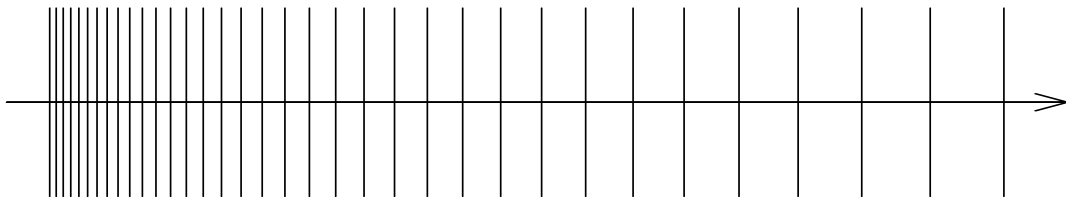


Abbildung 4.11.: Axiale Lage der Netzebenen für die Berechnung der laminaren Rohrströmung

Mit Werten der Relaxationsfaktoren von 0.8 für den Druck, 0.2 für die Geschwindigkeit und 1.0 für die Temperatur konnten die Maximumnormen der Residuen und Differenzen der Geschwindigkeitskomponenten und des Drucks innerhalb von 105 Iterationen um mehr als drei Größenordnungen reduziert werden. Dargestellt sind die Ergebnisse der nach 500 Iterationen vollständig konvergierten Lösung.

Aus Abbildung 4.12 ist ersichtlich, daß die Symmetrie der Rohrströmung gut wiedergegeben wird. Das berechnete Geschwindigkeitsfeld bei $z/(Re d_h) = 0.1$ stimmt, wie aus Abbildung 4.13 hervorgeht, sehr gut mit der exakten Lösung für den eingelaufenen Fall überein. Auch die berechneten Werte für den Druckverlust und die Nußelt-Zahl am Ende des Berechnungsgebietes (0.25726 Pa/m und 4.3729) stimmen sehr gut mit den exakten Werten für die entwickelte Strömung (0.256 Pa/m und 4.3636) überein.

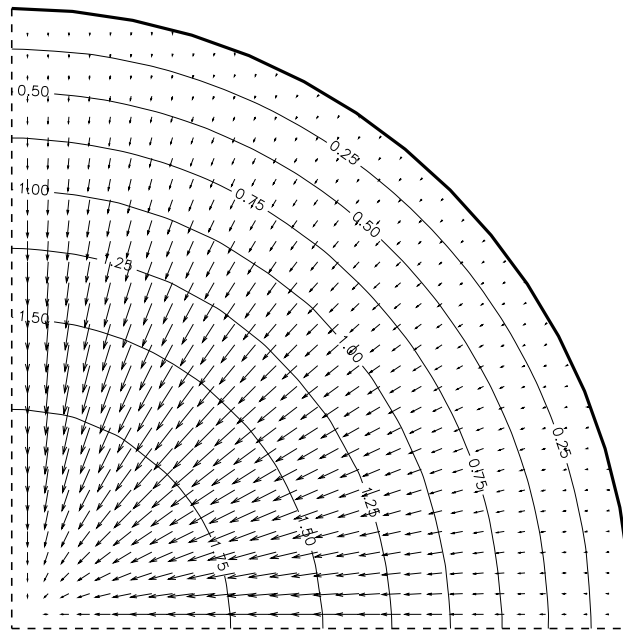


Abbildung 4.12.: Isolines des auf die mittlere Geschwindigkeit v_b bezogenen Geschwindigkeitsprofils und Geschwindigkeitsvektoren ($v_{\text{quer,max}}/v_b = 5.81 \cdot 10^{-5}$) der laminaren Rohrströmung bei $z/(\text{Re } d_h) = 0.1$

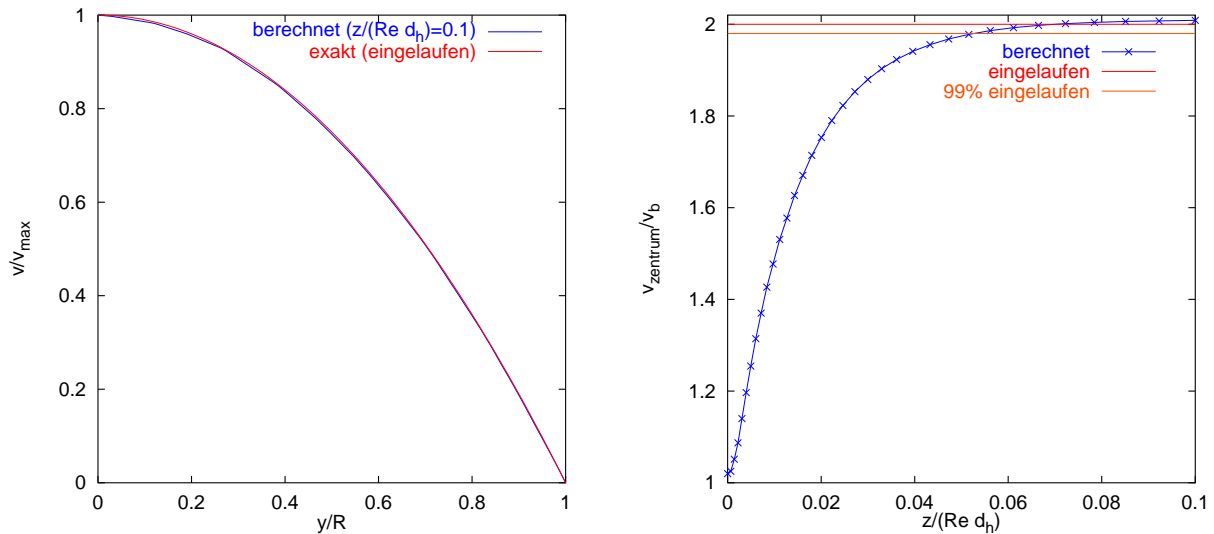


Abbildung 4.13.: Exaktes und berechnetes Geschwindigkeitsprofil bei $z/(\text{Re } d_h) = 0.1$ und berechnetes axiales Geschwindigkeitsprofil im Zentrum der laminaren Rohrströmung

Die Entwicklung des Geschwindigkeitsprofils und der axialen Verläufe des Drucks und der für $\dot{q}_w = 100 \text{ W/m}^2$ berechneten Nußelt-Zahl sind ebenfalls plausibel und stimmen gut mit den Näherungslösungen aus [SB87] überein. Die Zentralgeschwindigkeit erreicht 99% des Werts der entwickelten Strömung ($2 v_b$) bei $z/(\text{Re } d_h) = 0.0527$, siehe auch Abbildung 4.13. Die relativ geringe Abweichung vom Wert der Näherungslösung (0.0565) kann, wie bei der laminaren

Strömung zwischen zwei ebenen Platten, sowohl durch die aufgrund des flachen Verlaufs der Zentralgeschwindigkeit hohe Empfindlichkeit des Werts gegenüber kleinen Berechnungsfehlern als auch durch Abweichungen der Näherungslösung vom exakten Wert erklärt werden.

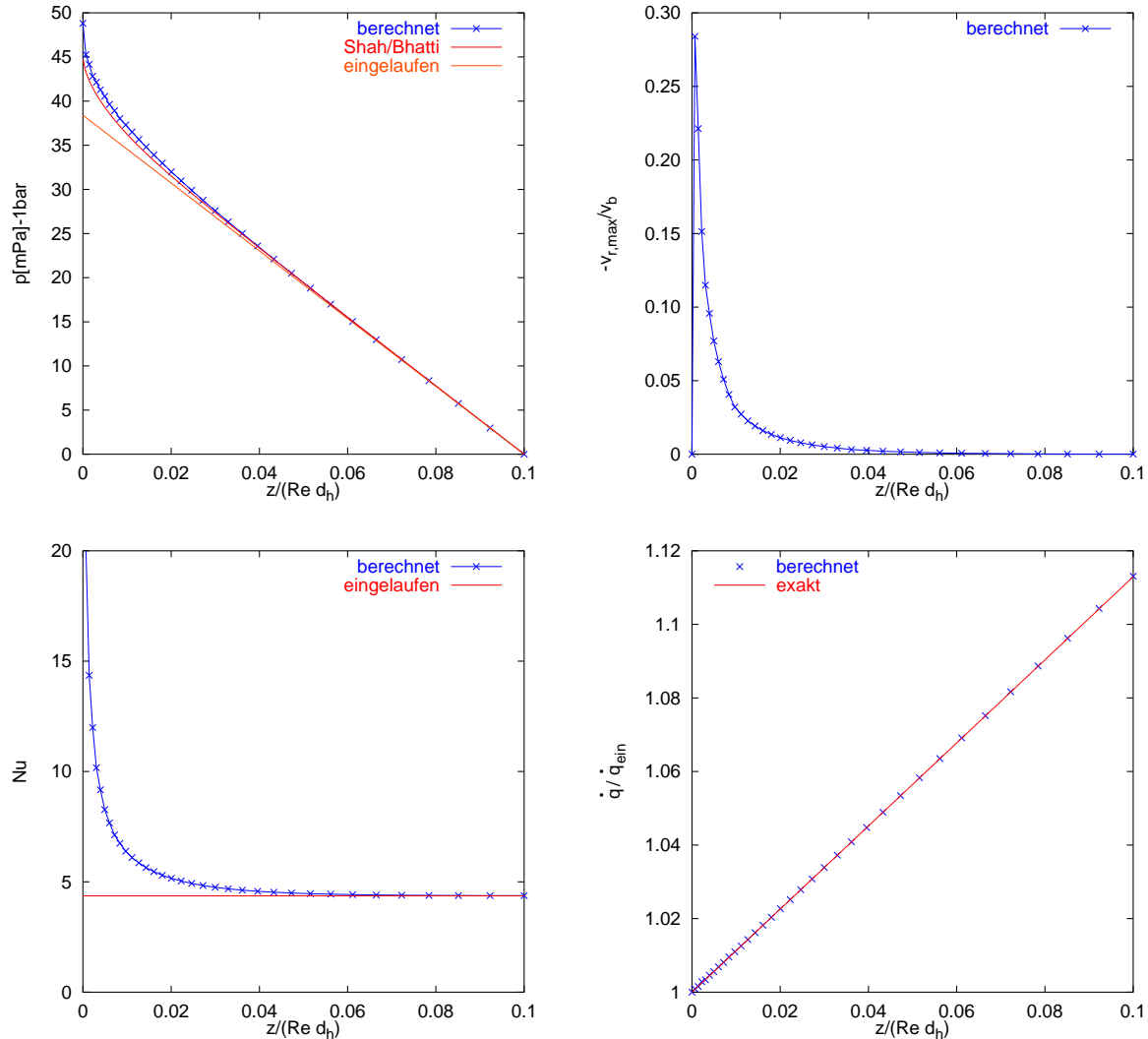


Abbildung 4.14.: Axialer Verlauf des mittleren Drucks p , der maximalen Quergeschwindigkeitskomponente $-v_{r,\max}$ der Nußelt-Zahl Nu und der mittleren Energiestromdichte \dot{q} der laminaren Rohrströmung

Mit einlaufender Strömung nähert sich der Verlauf des mittleren Drucks dem linearen Verlauf. Die sich entwickelnde Strömung zeigt den aus der laminaren Strömung zwischen zwei ebenen Platten bekannten Beschleunigungsdruckverlust. Der axiale Verlauf des Drucks liegt, wie in Abbildung 4.14 zu erkennen, nahe an dem Verlauf der in [SB87] angegebenen Näherungslösung, wobei der über den Querschnitt gemittelte Druck im Bereich der Abweichung gegenüber der Näherungslösung über den Querschnitt nicht konstant ist. Die Berechnung des Druckverlaufs bei realem Druckniveau von 10^5 Pa unterstreicht wiederum die Leistungsfähigkeit der gewählten Normierung.

Bei der Berechnung fällt die Geschwindigkeit innerhalb des wandnächsten Elements von der konstanten Eintrittsgeschwindigkeit auf Null ab. Dadurch, daß die Strömung in Wandnähe noch nicht eingelaufen ist, resultieren Druckspitzen an der Wand am Eintritt und daraus ergeben sich möglicherweise auch Abweichungen zur in [SB87] angegebenen Näherungslösung, die von einer bereits im Eintrittsbereich entwickelten Grenzschicht ausgeht. Auch bei der experimentellen Darstellung der von einer Kolbenströmung ausgehenden einlaufenden Rohrströmung ergeben sich Probleme, die in [Tru80] dargestellt sind. Danach kommt es bei einer guten Realisierung eines gleichförmigen Eintrittsprofils zu Ablösungen im Eintrittsbereich, so daß die Kanten am Eintritt abgerundet werden müssen und das Eintrittsprofil nur noch annähernd gleichförmig ist.

Wegen der bei einlaufender Strömung vorhandenen und in Abbildung 4.14 dargestellten Geschwindigkeitskomponente in Richtung des Rohrzentrums ist auch die in der gleichen Abbildung gezeigte Nußelt-Zahl im Bereich des Einlaufs größer als im eingelaufenen Fall.

4.3.3. Laminare Strömung durch ein Stabbündel

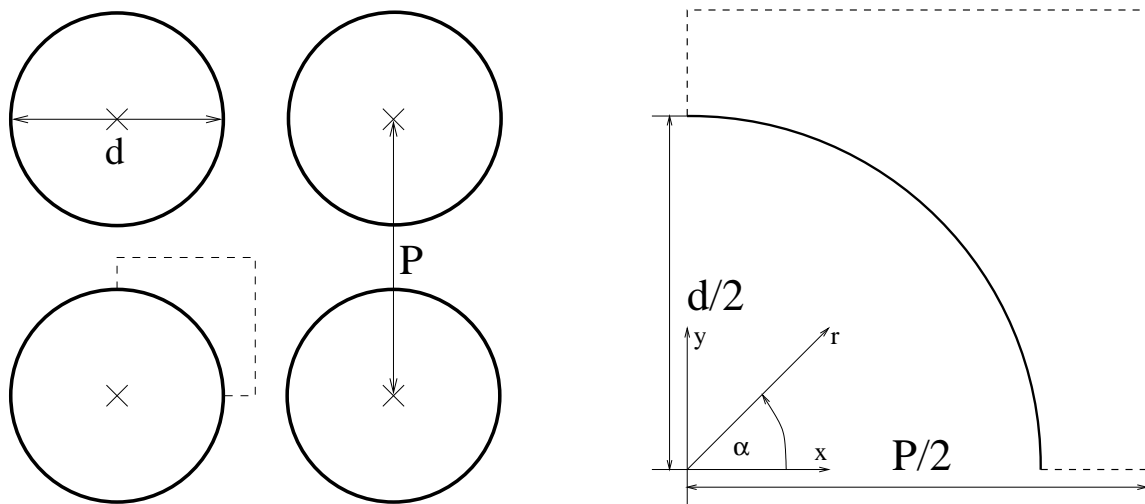


Abbildung 4.15.: Kanalgeometrie des Stabbündelausschnitts im Querschnitt

Für die Berechnung der laminaren axialen Durchströmung eines unendlichen Stabbündels quadratischer Stabanordnung wird der in Abbildung 4.15 dargestellte Symmetrieausschnitt gewählt. Zwar wäre auch die Hälfte des Ausschnitts ausreichend gewesen, aber durch die so getroffene Wahl läßt sich das numerische Verfahren anhand der im Rechengbiet vorhandenen Symmetrie anhand von Symmetrieabweichungen der Lösung testen.

Für den Fall einer eingelaufenen Strömung ist in [SL59] eine geschlossene Lösung für das Geschwindigkeitsprofil und den Druckverlust angegeben. Mit $s = P/2$ und $r_0 = d/2$ gilt

$$v_z^* = \frac{v_z(r, \alpha)}{-s^2 \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}} = \left(\frac{2}{\pi} \ln \frac{r}{r_0} - \frac{1}{4} \frac{r^2 - r_0^2}{s^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{4j} \left(\left(\frac{r}{s} \right)^{4j} - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{4j} \left(\frac{r_0}{s} \right)^{4j} \right) \cos(4j\alpha) \right).$$

Die in dem Ausdruck enthaltene unendliche Reihe kann wegen der sehr schnell fallenden Werte für die c_i früh abgebrochen werden. Die c_i werden durch die Gleichung

$$\frac{2}{\pi} (\cos \alpha)^2 - \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n c_j (\cos \alpha)^{1-4j} \left(\cos((4j-1)\alpha) + \left(\frac{r_0}{s} \cos \alpha \right)^{8j} \cos((4j+1)\alpha) \right) = 0$$

für n unterschiedliche Winkel $\alpha \in [0, \pi/4]$ bestimmt.

Bei gegebenen Längen P und d , gegebener mittlerer Geschwindigkeit v_b und gegebener Viskosität μ läßt sich der Druckverlust dann nach

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\mu v_b}{s^2} \frac{\int_0^{\pi/4} \int_{r_0}^{s/\cos \alpha} r dr d\alpha}{\int_0^{\pi/4} \int_{r_0}^{s/\cos \alpha} v_z^*(r, \alpha) r dr d\alpha}$$

berechnen. Damit ist auch das entwickelte Geschwindigkeitsfeld $v_z(r, \alpha)$ bekannt.

ρ	$= 1.0 \text{ kg/m}^3$	v_b	$= 1.0 \text{ m/s}$
ν	$= 1.0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$	P	$= 2.6 \text{ m}$
c_p	$= 100.0 \text{ J/(kg K)}$	d	$= 2.0 \text{ m}$
β	$= 0.00341 \text{ 1/K}$	d_h	$= 2.3035 \text{ m}$
λ	$= 1.0 \text{ W/(m K)}$	L	$= 60.0 \text{ m}$
Pr	$= 1.0$	$\text{Re} = \text{Pé}$	$= 230.35$

Tabelle 4.3.: Materialwerte des Modellfluids und charakteristische Größen der berechneten laminaren Strömung durch ein Stabbündel

Für die in Tabelle 4.3 angegebenen Bündelabmessungen und Materialwerte ergeben sich mit $n = 8$ für die Koeffizienten c_i der exakten Lösung des entwickelten Geschwindigkeitsprofils die folgenden Werte:

c_1	$= -1.17014 \cdot 10^{-1}$	c_3	$= +6.29022 \cdot 10^{-4}$	c_6	$= +3.94693 \cdot 10^{-6}$
c_2	$= -6.01346 \cdot 10^{-3}$	c_5	$= +3.31983 \cdot 10^{-5}$	c_8	$= +1.15379 \cdot 10^{-8}$
c_4	$= +1.74953 \cdot 10^{-4}$	c_7	$= +3.84815 \cdot 10^{-7}$		

Damit kann auch der Druckverlust der eingelaufenen Strömung bestimmt werden. Es ist $-\partial p/\partial z = 0.09112 \text{ Pa/m}$. Nach der in [Reh87] angegebenen Korrelation für den Reibungsbeiwert

$$\lambda_f = \frac{162.8}{\text{Re}} \left(\frac{P}{d} - 1 \right)^{0.435} \stackrel{P/d=1.3}{=} \frac{96.4278}{\text{Re}}$$

ergibt sich mit den in Tabelle 4.3 angegebenen Werten der Druckverlust zu 0.09083 Pa/m .

Wie aus Abbildung 4.16 ersichtlich, wurde der Querschnitt azimuthal in 40 Elemente gleicher Winkelausdehnung und radial in 20 Elemente eingeteilt, deren Ausdehnung in radialer Richtung, das heißt mit zunehmender Entfernung von der Stabwand, um den Faktor 1.05 je

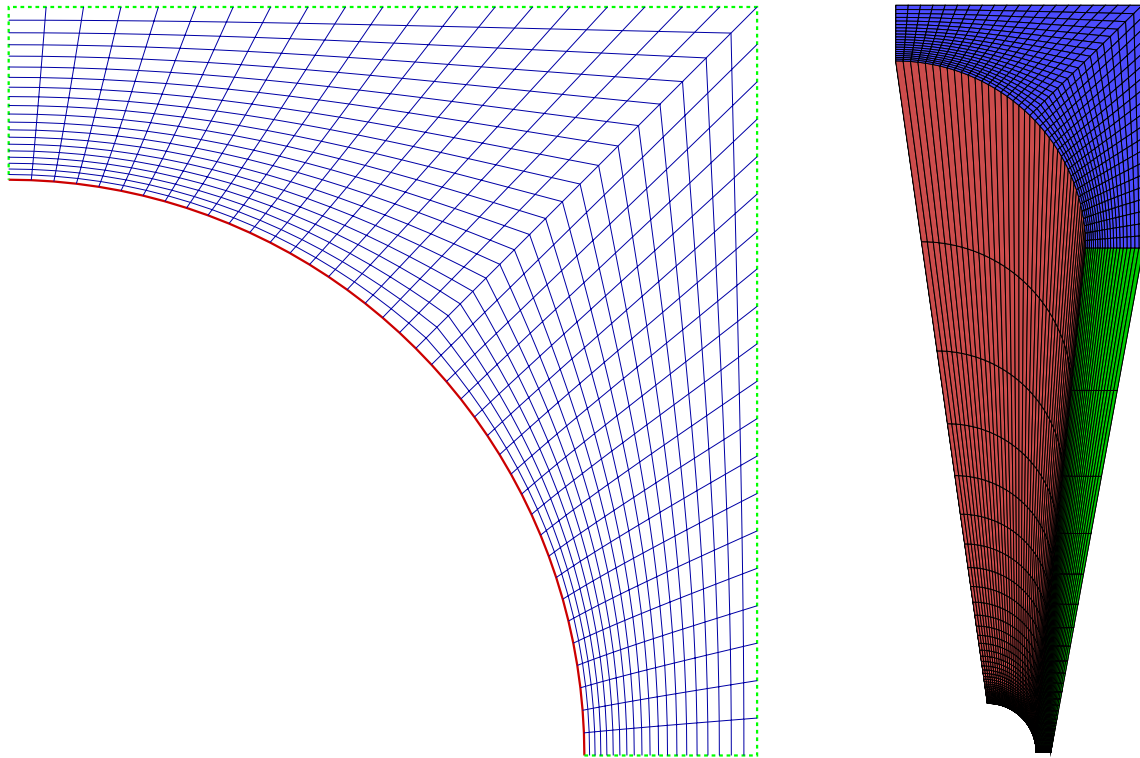


Abbildung 4.16.: Vernetzung des Stabbündelausschnitts

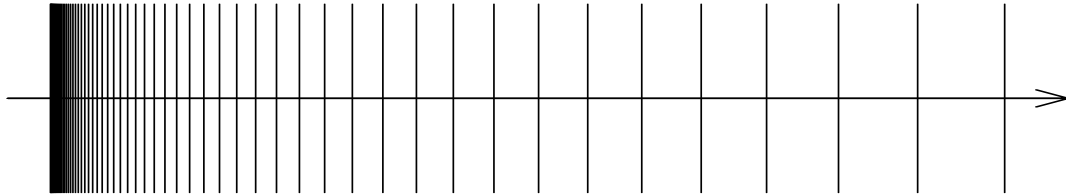


Abbildung 4.17.: Axiale Lage der Netzebenen für die Berechnung der laminaren Strömung durch ein Stabbündel

Schicht zunimmt. Axial wurden 61 Netzebenen verwendet, deren Abstände um den Faktor 1.1 in Richtung des Austritts zunehmen (siehe Abbildung 4.17).

Das blockstrukturierte Netz setzt sich damit aus 48 000 Quaderelementen mit insgesamt 52521 Knoten zusammen. Es treten keine besonders spitzen oder stumpfen Winkel auf; der kleinste Elementinnenwinkel hat einen Wert von 45° , der größte einen Wert von 134.6° .

Numerisch ungünstiger ist aufgrund der Länge des Kanals die Streckung der Elemente: Das maximale Verhältnis der Volumina benachbarter Elemente beträgt 1.1 und das Verhältnis von größtem zu kleinstem Elementvolumen 2215. Das Verhältnis der Abmessungen eines Elements erreicht aufgrund der starken Elementstreckung am Austritt sogar den Wert 603.2.

Mit Werten der Relaxationsfaktoren von 0.8 für den Druck, 0.2 für die Geschwindigkeit und 1.0 für die Temperatur konnten die Maximumnormen der Residuen und Differenzen innerhalb

von 160 Iterationen um mindestens vier Größenordnungen reduziert werden. Abbruchkriterium war das Unterschreiten des Werts 10^{-4} für die maximalen Differenzen aller normierten Feldvariablen.

Daß die Lösung im Druck- wie im Geschwindigkeitsfeld die zu erwartende Symmetrie zeigt, wird in Abbildung 4.18 deutlich. Der maximale Wert der in der Abbildung wiedergegebenen Querströmungskomponenten beträgt 0.053 m/s für $z = 1.0 \text{ m}$.

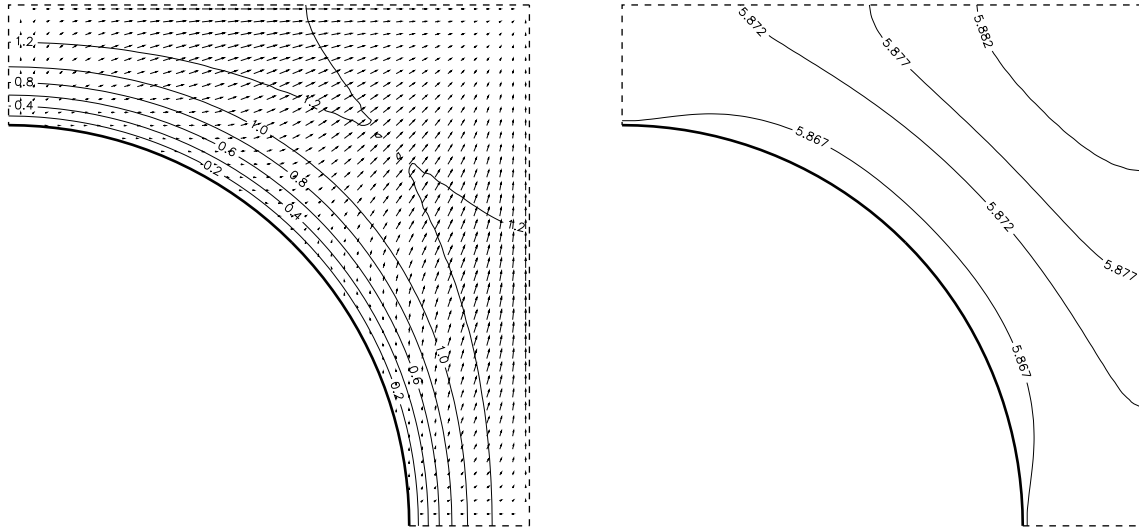


Abbildung 4.18.: Isolinien der Geschwindigkeit in m/s in axialer Richtung, der Geschwindigkeitsvektoren und Isolinien des Drucks ($p - 10^5 \text{ Pa}$) in Pascal der laminaren Strömung durch ein Stabbündel bei $z = 1.0 \text{ m}$

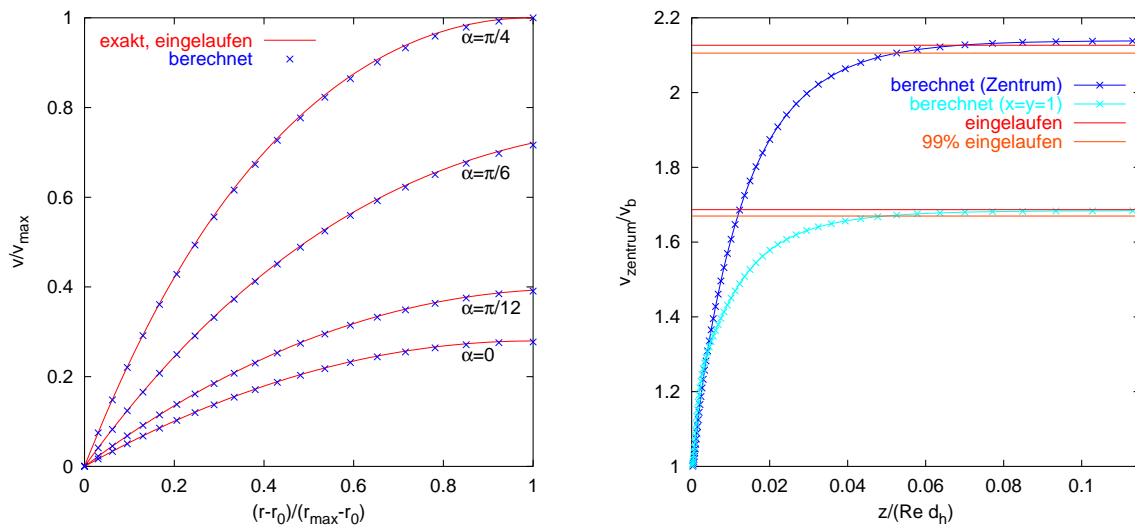


Abbildung 4.19.: Exakte und berechnete Geschwindigkeitsprofile bei $z/(\text{Re } d_h) = 0.113$ und berechnete axiale Verläufe der Geschwindigkeit der laminaren Strömung durch ein Stabbündel

Die berechneten Werte am Kanalaustritt ($z/d_h = 26.0$, $z/(Re d_h) = 0.113$) können wieder mit den exakten Lösungen der entwickelten Strömung verglichen werden. Der berechnete Druckverlust ergibt sich zu 0.09110 Pa/m und liegt damit wieder sehr nah bei der exakten Lösung. Auch das in Abbildung 4.19 wiedergegebene Geschwindigkeitsprofil stimmt sehr gut mit der exakten Lösung überein.

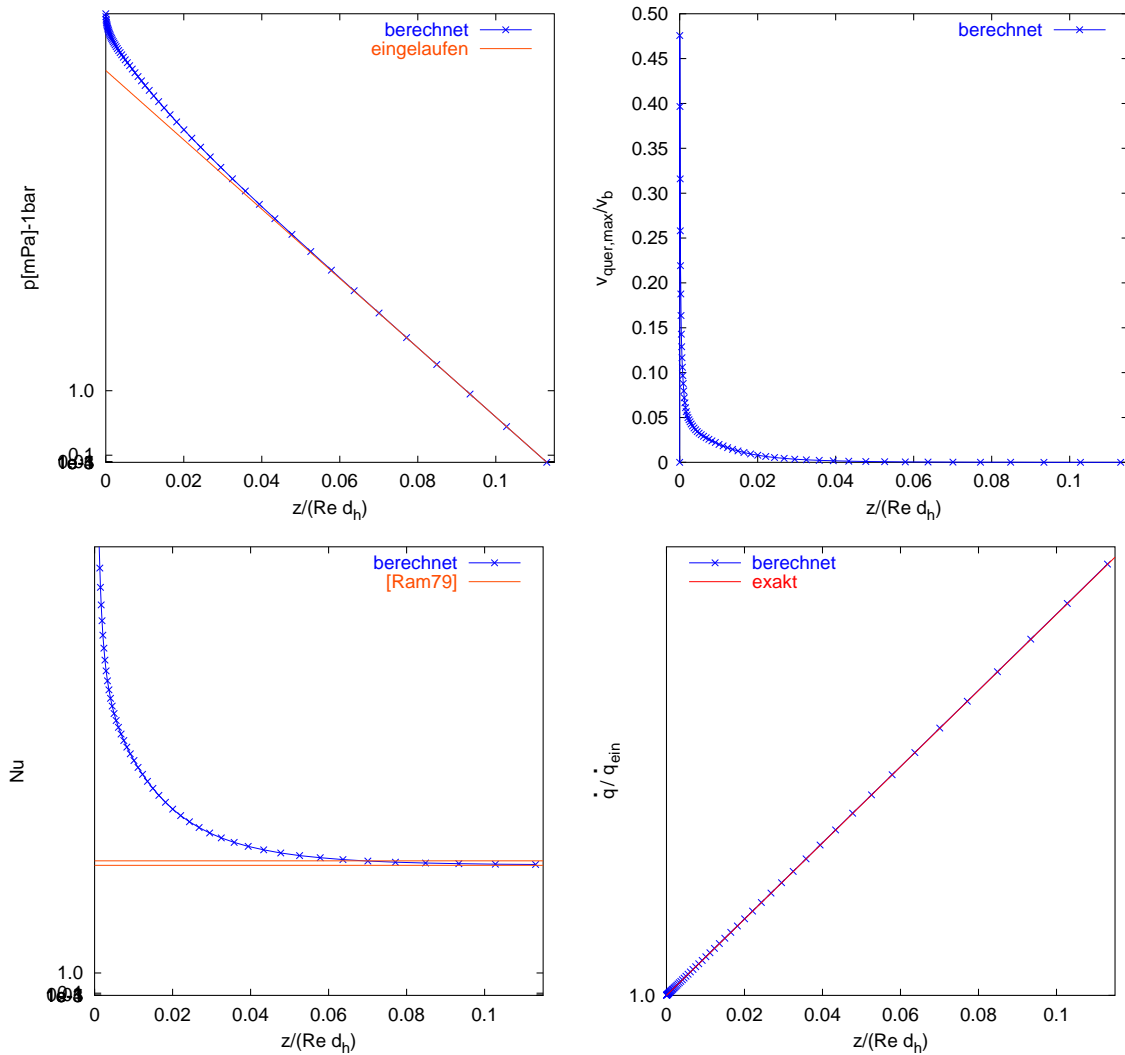


Abbildung 4.20.: Berechnete axiale Verläufe des mittleren Drucks p , der maximalen Quergeschwindigkeitskomponente $v_{\text{quer,max}}$, der Nußelt-Zahl Nu und der mittleren Energiestromdichte \dot{q} der laminaren Strömung durch ein Stabbündel

Bei gleicher Vernetzung des Querschnitts ergibt sich bei der Berechnung der eingelaufenen Strömung wiederum eine sehr gute Übereinstimmung mit den exakten Werten für die eingelaufene Strömung. Mit Relaxationsfaktoren von 1.0 für den Druck und die Geschwindigkeit konnten die Maximumnormen der Residuen und Differenzen innerhalb von 170 Iterationen um etwa mehr als zehn Größenordnungen reduziert werden. Abbruchkriterium war das Unterschreiten des Werts 10^{-10} für die maximalen Differenzen aller normierten Feldvariablen.

Der berechnete Wert für den Druckverlust beträgt 0.09116 Pa/m.

Der in Abbildung 4.20 dargestellte axiale Verlauf des Drucks, der maximalen Querströmungskomponente und der Nußelt-Zahl entspricht qualitativ dem der zuvor behandelten laminaren Strömungsfälle. Die über $z/(Re d_h)$ aufgetragene Entwicklung der Feldgrößen ist dem von der laminaren Rohrströmung her bekannten und in Abbildung 4.14 wiedergegebenen Verlauf sehr ähnlich. Die Energieerhaltungsgleichung ist sehr gut erfüllt und die berechnete Nußelt-Zahl hat für die entwickelte Strömung einen Wert von 5.84, der mit dem aus [Ram79, Abbildung 5.3.11] entnommenen Wert von etwa 5.9 ± 0.1 für die eingelaufene Strömung übereinstimmt.

5. Berechnung turbulenter Strömungen

In diesem Kapitel wird die Validierung sowohl des in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellten Simulationsverfahrens für turbulente Strömungen als auch der beschriebenen Modellierungen anhand von Simulationsergebnissen anderer Programme und von Experimenten beschrieben.

Im ersten Abschnitt wird die Modellierung und Berechnung der Strömung im wandnahen Bereich überprüft. Für im Gleichgewicht befindliche wandgebundene Strömungen werden Simulationen durchgeführt und die Eignung der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Modellierungen auch für stark beheizte Strömungen und Strömungen entlang rauher Wände nachgewiesen.

Die Validierung und Modelloptimierung anhand dreidimensionaler turbulenter Strömungen ist Inhalt des zweiten und dritten Abschnitts. Eine Validierung des numerischen Verfahrens kann nur anhand von Simulationsergebnissen bei Zugrundelegung des gleichen Modells erfolgen. Zu Vergleichsrechnungen werden die in Kapitel 2 beschriebenen Strömungsfälle herangezogen.

Die Modelloptimierung erfolgt dagegen allein anhand der Kapitel 2 entnommenen experimentell ermittelten Strömungsfelder. Dadurch, daß Profile der mittleren und der turbulenten Größen am Eintritt und an unterschiedlichen axialen Positionen bestimmt worden sind, ermöglichen sie eine Bewertung unterschiedlicher Turbulenzmodelle.

Es werden sowohl unterschiedliche numerische Simulationen des wandnahen Bereichs als auch unterschiedliche Modellierungen der Bilanz der turbulenten Dissipation und der Reynoldsschen Spannungen am Beispiel der turbulenten Strömung durch einen quadratischen Kanal gegenübergestellt. Die Modelle, mit denen die beste Übereinstimmung mit den experimentellen Daten erzielt werden kann, werden anschließend auf die in Kapitel 2 beschriebene turbulente Strömung durch ein Stabbündel angewendet.

5.1. Wandnahe turbulente Strömungen

In diesem Abschnitt wird die Modellierung und Berechnung der Strömung im wandnahen Bereich mit Hilfe von k - ε -Modellen, die in der Nähe fester Wände gültig sind (low-Re- k - ε -Modelle), überprüft. Die Berechnung erfolgt, wie bereits in den Abschnitten 3.4 und 4.2.3 beschrieben und in Abbildung 3.1 dargestellt, eindimensional zwischen der Wand und dem

wandnächsten Knoten des finite Elemente-Netzes. Die Lage der Stützpunkte wird während jeder Simulation des wandnahen Bereichs an den Verlauf der Feldgrößen v^+ , k^+ , ε^+ und T^+ adaptiv angepaßt.

An dem Rand zur Strömung werden bei der Berechnung nur des wandnahen Bereichs die Bedingungen einer Gleichgewichtsströmung vorgegeben (siehe Abschnitt 2.1.3). Für den Fall temperaturabhängiger Stoffwerte und starker Beheizung, bei dem die normierten Verläufe der Feldvariablen keine universellen Funktionen mehr sind, werden in einem Druckwasserreaktor auftretende Bedingungen gewählt. Charakteristische Größen und Materialwerte sind in Tabelle 5.1 zusammengestellt.

p	$=$	15.5 MPa	P	$=$	14.3 mm
T	$=$	310 °C	D	$=$	10.75 mm
ρ	$=$	705 kg/m ³	P/D	$=$	1.33
ν	$=$	$1.199 \cdot 10^{-7}$ m ² /s	d_h	$=$	13.47 mm
c_p	$=$	5739 J/(kg K)	v_b	$=$	4.5 m/s
β	$=$	0.003261 1/K	Re	$=$	$0.506 \cdot 10^6$
λ	$=$	0.5417 W/(m K)	Pé	$=$	$0.453 \cdot 10^6$
Pr	$=$	0.896	$\dot{q}_{w,\max}$	$=$	$1.6 \cdot 10^6$ W/m ²
$p_v(T)$	$=$	9.87 MPa	u_τ	\approx	0.2 m/s
$T_v(p)$	$=$	344.8 °C			

Tabelle 5.1.: Charakteristische Größen und Materialwerte von Wasser für typische Druckwasserreaktorbedingungen

Aus den in Tabelle 5.1 angegebenen Werten können Randbedingungen am wandnächsten Punkt des Kernbereichs unter der Annahme eines Gleichgewichts von turbulenter Produktion und Dissipation und unter Zugrundelegung eines Wertes für y_1^+ (in diesem Abschnitt ist $y_1^+ = 70$) mit Hilfe der im Anhang A.4.4 wiedergegebenen universellen Wandfunktionen berechnet werden.

In Abbildung 5.1 sind die Ergebnisse der Simulation des wandnahen Bereichs dargestellt. An der Lage der Stützstellen ist deutlich die adaptive Netzanpassung zu erkennen.

Die Verläufe für die dimensionslose Geschwindigkeit und die dimensionslose Temperatur über dem dimensionslosen Wandabstand stimmen gut mit den im Anhang A.4.4 wiedergegebenen universellen Funktionen überein. Auch die dimensionslosen Turbulenzfeldgrößen und die turbulente Schubspannung liegen in den beispielsweise in [PRS85] angegebenen Bereichen und zeigen das dort angegebene Verhalten für kleine beziehungsweise große Werte von y^+ .

Der Gradient der Turbulenzenergie sollte im Gleichgewichtsfall flach, die Turbulenzenergieproduktion und -dissipation gleich sein. Die in Abbildung 5.1 zu erkennenden Abweichungen liegen innerhalb der durch empirische oder halbempirische Untersuchungen gefundenen Bereiche [PRS85]. Eine mögliche Ursache der Abweichungen ist die Vorgabe der Werte am wandnächsten Knoten der Kernströmung unter Zuhilfenahme universeller Wandfunktionen,

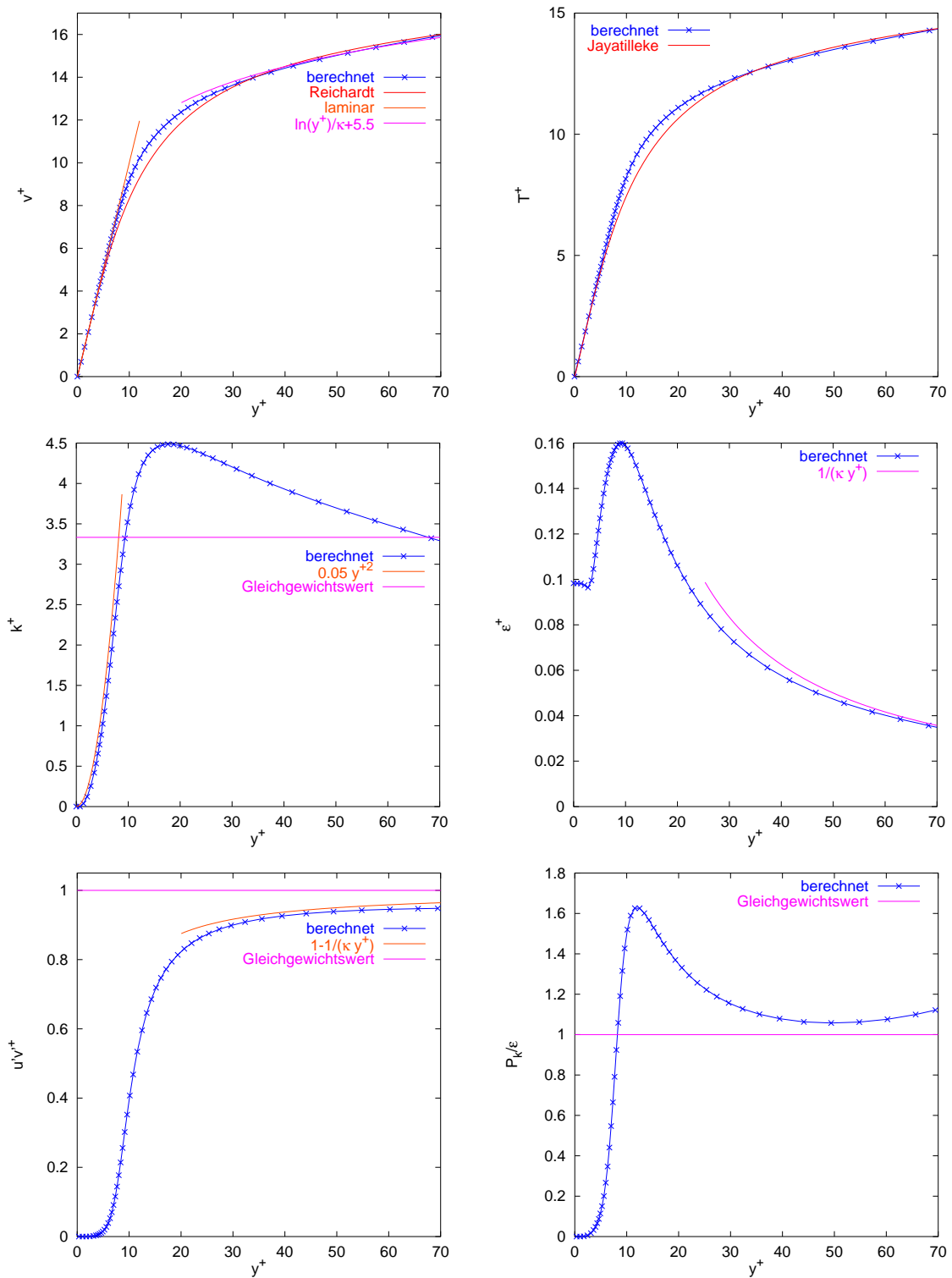


Abbildung 5.1.: Verlauf der dimensionslosen Feldvariablen (v^+ , T^+ , k^+ , ε^+), der turbulenten Scherspannung ($u'v^+$) und des Verhältnisses von Turbulenzenergieproduktion zu -dissipation (P_k/ε) über dem dimensionslosen Wandabstand

die damit nicht exakt zur Modellierung des wandnahen Bereichs paßt. Bei der dreidimensionalen Strömungsberechnung stellen sich diese Werte gerade aufgrund der durch die Simulation des wandnahen Bereichs ermittelten Neumann-Randbedingungen ein, so daß ein realistischerer Verlauf zu erwarten ist.

In dreidimensionalen Strömungen ist die Annahme eines Gleichgewichts von Produktion und Dissipation der Turbulenzenergie in der Regel nicht zutreffend. Abweichungen von dem in Wandnähe angenommenen Gleichgewicht können bei Verwendung von Wandfunktionen prinzipiell nicht berücksichtigt werden. Die Simulation des wandnahen Bereichs ermöglicht, da sie ohne die Annahme eines solchen Gleichgewichts auskommt, aber wenigstens eine näherungsweise Berücksichtigung auftretender Abweichungen vom Gleichgewicht.

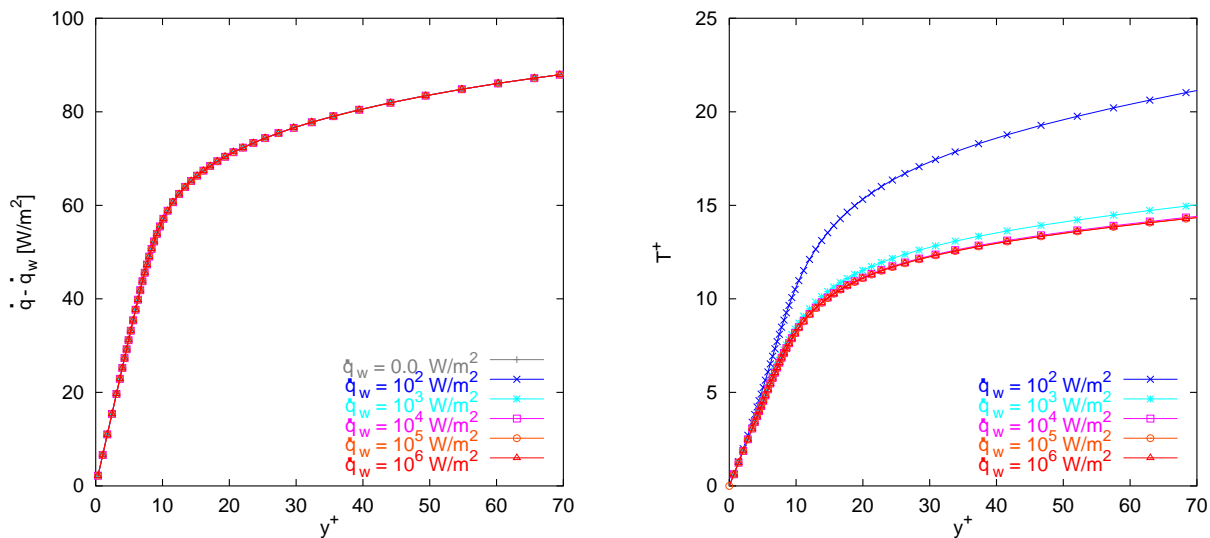


Abbildung 5.2.: Verlauf des durch Dissipation bedingten Wärmestroms und der dimensionslosen Temperatur über dem dimensionslosen Wandabstand in Abhängigkeit vom Wärmestrom an der Wand

In Abbildung 5.2 sind die Differenz aus Gesamtwärmestrom und an der Wand vorgegebenem Wärmestrom – also der durch Dissipation bedingte Wärmestrom – und die dimensionslose Temperatur für unterschiedliche Werte des Wärmestroms an der Wand wiedergegeben. Der durch Dissipation bedingte Wärmestrom ist bei Annahme konstanter Stoffwerte nur vom Gradienten der Geschwindigkeit und der Dissipation von Turbulenzenergie abhängig und damit unabhängig vom Wärmestrom an der Wand. Dieses Verhalten wird sehr gut wiedergegeben – der durch Dissipation bedingte zusätzliche Wärmestrom liegt zum Teil mehrere Größenordnungen unter dem Gesamtwärmestrom.

Der universellen Temperaturwandfunktion nähern sich die in Abbildung 5.2 dargestellten Kurven erst bei an der Wand vorgegebenen Wärmeströmen, die deutlich größer sind als der durch Dissipation bedingte zusätzliche Wärmestrom. Das liegt daran, daß universelle Temperaturwandfunktionen nur unter der Voraussetzung vernachlässigbarer Dissipation gelten. Dadurch, daß der eingeprägte Wärmestrom nicht groß gegen den durch Dissipation bedingten Wärmestrom war, ist möglicherweise auch die große Streuung der in [Jay69] zitierten

experimentellen Ergebnisse und Korrelationen für universelle Temperaturwandfunktionen begründet.

Der Einfluß der Dissipation ist bei den großen in Wärmetauschern auftretenden Wärmeströmen vernachlässigbar. Ein Problem bei der Anwendung universeller Funktionen für die Temperatur und auch für die Geschwindigkeit ist bei großen Wärmeströmen allerdings die Variation der Stoffwerte, da die universellen Funktionen nur für konstante Stoffwerte gelten.

Abbildung 5.3 zeigt für die in Tabelle 5.1 angegebenen Randbedingungen einen Vergleich mit der Berechnung konstanter und realer Stoffwerte. Die Abbildung verdeutlicht, daß schon die zur Normierung heranzuziehenden Materialwerte sich nahe der Wand deutlich ändern. Damit wird die bei der Verwendung von Wandfunktionen beispielsweise durch unterschiedlich angegebene Werte der von Kármánschen Konstante $\kappa = 0.41 \pm 0.015$ [PRS85] ohnehin vorhandene Ungenauigkeit weiter erhöht.

Um bei der experimentellen Ermittlung universeller Temperaturwandfunktionen für die Simulation verlässliche Werte ermitteln zu können, sollte vor der Durchführung der Bereich des Wärmestroms ermittelt werden, in dem die Gültigkeit universeller Wandfunktionen gesichert ist. Dies kann mit Hilfe einer numerischen Simulation geschehen. Auch eine Bewertung der Eignung bereits durchgeführter Experimente zur Bestimmung des universellen Verlaufs der Temperatur in Wandnähe auf dem Weg der numerischen Simulation erscheint angesichts der großen Streuung der Daten sinnvoll.

Die mit Hilfe der in Abschnitt 3.4 beschriebenen Modellierung rauher Wände berechneten Ergebnisse für den Verlauf der mittleren Geschwindigkeit sind in Abbildung 5.4 der Korrelation für gleichförmige Sandkornrauigkeit (A.13) gegenübergestellt. Die Normierung erfolgte dabei auf die in Tabelle 5.1 angegebenen Werte. Die berechneten Gradienten am Rand zur Kernströmung stimmen gut mit den Gradienten der Korrelation überein und damit die berechneten Spannungen mit den aus den universellen Funktionen ermittelten Spannungen.

Es existieren auch Korrelationen und experimentelle Daten für die universelle Temperaturwandfunktion bei rauhen Wänden [Jay69]. Deren Streuung ist allerdings so groß, daß ein Vergleich mit den berechneten Ergebnissen in dieser Arbeit nicht vorgenommen wird (siehe auch [Rup97]).

Zum Abschluß der Verifikation der Modellierung und Berechnung der Strömung im wandnahen Bereich wird für konstante Stoffwerte und die in Tabelle 5.1 angegebenen Bedingungen der Einfluß der Netzfeinheit und der Abbruchkriterien auf die berechnete Lösung untersucht.

Aus Abbildung 5.5 ist zu ersehen, daß bei der Verwendung von 25 Stützstellen durch die verwendete Netzadaption bereits eine netzunabhängige Lösung aller berechneten Größen, selbst der abgeleiteten Größen wie der turbulenten Scherspannung und dem Wärmestrom, erreicht wird.

Die Ergebnisse einer quantitativen Untersuchung der Anzahl notwendiger Stützstellen und des zu wählenden Abbruchkriteriums sind in den Tabellen 5.2 und 5.3 aufgeführt. Dabei wurde der Einfluß der Stützstellenanzahl und des Abbruchkriteriums auf die als Randbedingung

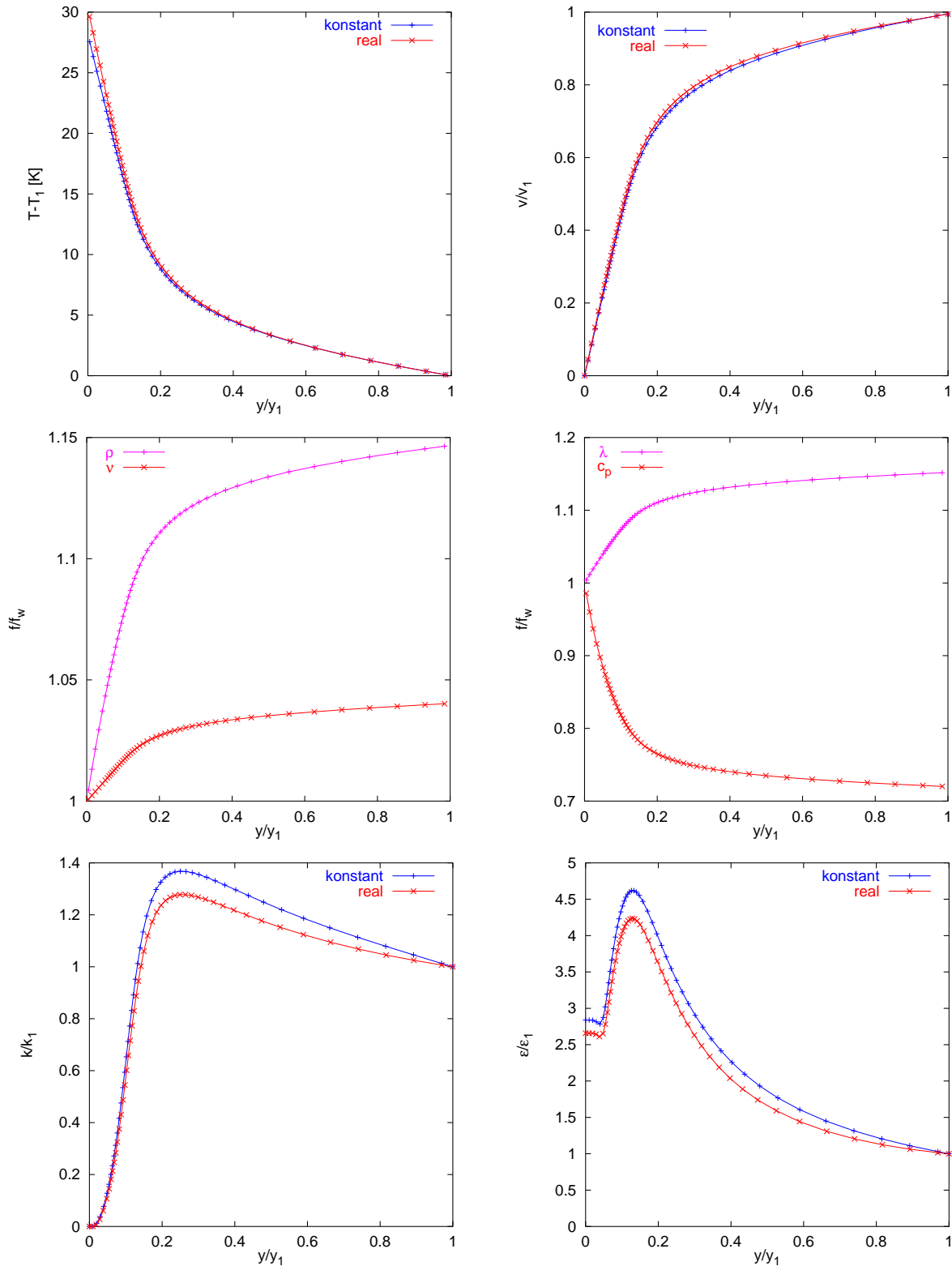


Abbildung 5.3.: Verlauf der berechneten Größen im wandnahen Bereich bei der Verwendung realer und konstanter Stoffwerte

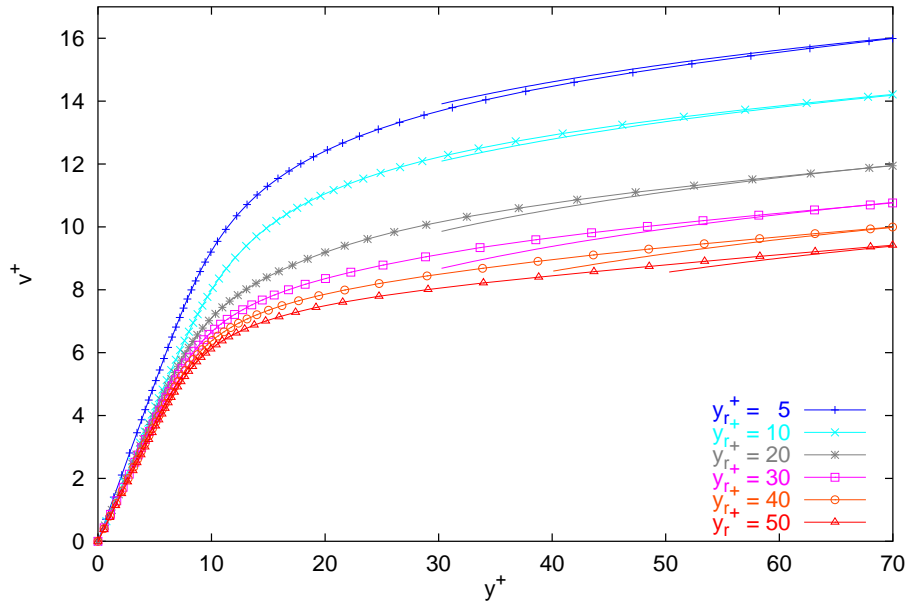


Abbildung 5.4.: Verlauf der dimensionslosen Geschwindigkeit im wandnahen Bereich in Abhängigkeit von der dimensionslosen Wandrauigkeit y_r^+ ; es sind jeweils die berechneten Verläufe der Korrelation (A.13) gegenübergestellt

$\delta\sigma$ [%]		Anzahl der Stützstellen							
		10	15	20	25	30	40	50	100
$\Delta f/f$	10^{-2}	-1.278	-0.248	-0.014	-0.061	-0.306	0.398	0.448	0.497
	10^{-3}	-1.029	-0.336	-0.276	-0.154	-0.120	-0.099	-0.081	-0.058
	10^{-4}	-1.054	-0.283	-0.235	-0.122	-0.079	-0.038	-0.020	0.005
	10^{-5}	-1.053	-0.287	-0.239	-0.126	-0.084	-0.044	-0.025	0.000
	10^{-6}	-1.052	-0.287	-0.238	-0.126	-0.084	-0.043	-0.025	0.000

Tabelle 5.2.: Relativer Fehler $\delta\sigma = (\sigma_{1,n} - \sigma_{1,100})/\sigma_{1,100}$ der berechneten Spannung am Rand zur Kernströmung in Abhängigkeit von der Anzahl der Stützstellen und dem Abbruchkriterium

an den Bereich der Kernströmung verwendete Spannung und die berechnete Wandtemperatur ermittelt. Als Abbruchkriterium wird die als $\Delta f/f$ bezeichnete maximale Änderung der Feldgrößen im Verhältnis zur Gesamtvariation der jeweiligen Größe herangezogen.

Bei den bisherigen Simulationen wurde $\Delta f/f = 10^{-6}$ verwendet. Die Ergebnisse der Tabellen legen jedoch nahe, daß $\Delta f/f = 10^{-3}$ bei 25 Stützstellen völlig ausreichend ist. Auf einem einfachen PC (133 MHz Prozessor- und 66 MHz Bustakt) wird, wie bereits in Abschnitt 4.2.3 gesagt, unter diesen Bedingungen eine Rechengeschwindigkeit von etwa 50 Simulationen des wandnahen Bereichs pro Sekunde erreicht, falls die Ergebnisse der vorhergehenden Simulation nicht genutzt werden können. Bei aufeinanderfolgenden Simulationen mit ähnlichen Randbedingungen wird durch Verwendung der bereits berechneten Ergebnisse eine Verdoppelung der Rechengeschwindigkeit erzielt.

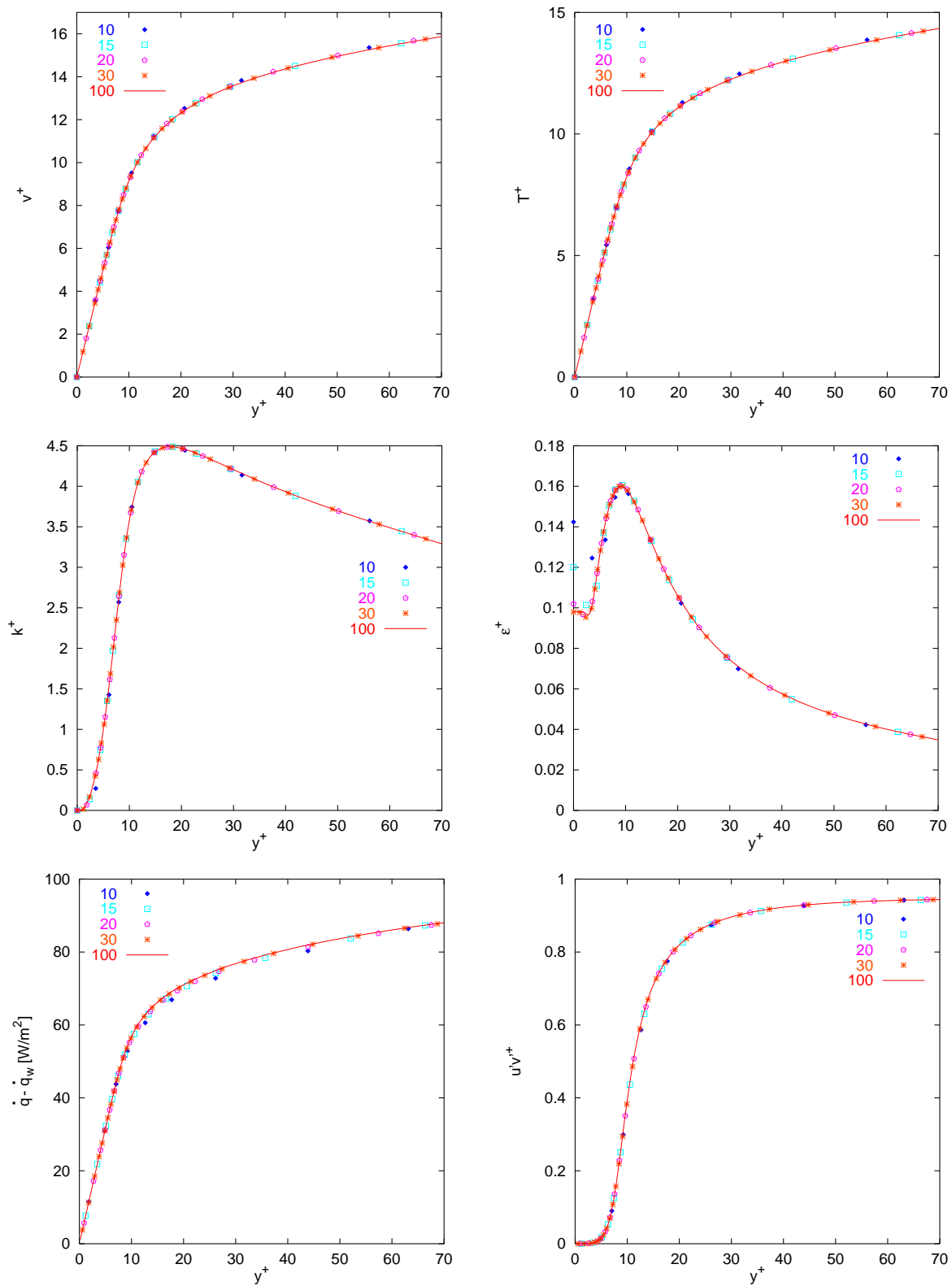


Abbildung 5.5.: Abhängigkeit der berechneten Größen im wandnahen Bereich von der Anzahl der verwendeten Stützstellen

δT [%]	Anzahl der Stützstellen							
	10	15	20	25	30	40	50	100
$\Delta f/f$	10^{-2}	1.253	0.231	0.004	0.053	-0.312	-0.401	-0.447
	10^{-3}	0.998	0.320	0.266	0.146	0.114	0.096	0.078
	10^{-4}	1.023	0.226	0.224	0.114	0.075	0.036	0.018
	10^{-5}	1.023	0.270	0.227	0.121	0.078	0.039	0.021
	10^{-6}	1.023	0.270	0.227	0.117	0.078	0.039	0.021

Tabelle 5.3.: Relativer Fehler $\delta T = (T_{w,n} - T_{w,100}) / (T_{w,100} - T_{1,100})$ der berechneten Wandtemperatur in Abhängigkeit von der Anzahl der Stützstellen und dem Abbruchkriterium

Anhand der Tabellen 5.2 und 5.3 läßt sich für das Abbruchkriterium $\Delta f/f = 10^{-6}$ mit den Werten für 10, 20 und 40 Stützstellen oder den Werten für 25, 50 und 100 Stützstellen wie in Abschnitt 4.3.1 die Ordnung des numerischen Verfahrens bestimmen. Sowohl für die Spannungen als auch für die Wandtemperatur ergibt sich, daß das Verfahren von zweiter Ordnung ist.

5.2. Turbulente Strömung durch einen quadratischen Kanal

Die in Abschnitt 2.2.1 beschriebene turbulente Strömung durch einen quadratischen Kanal wird in diesem Abschnitt herangezogen, um das in dieser Arbeit entwickelte Verfahren weiter zu validieren und eine Vielzahl unterschiedlicher Turbulenzmodelle zu bewerten.

Die zugrundegelegten Materialwerte sind in Tabelle 2.1 auf Seite 16 wiedergegeben. Als Eintrittsrandbedingungen wurde neben einem konstanten Geschwindigkeitsvektor in z -Richtung eine konstante Turbulenzintensität von 0.2% entsprechend $\tilde{k}_{\text{ein}} = 0.0013 \text{ m}^2/\text{s}^2$ sowie ein konstanter Wert der Dissipation von Turbulenz von $\tilde{\varepsilon}_{\text{ein}} = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}^3$ entsprechend einer Turbulenzviskosität von 1/10 der molekularen Viskosität verwendet.

Der Abstand der wandnächsten Knoten von der Wand wird mit $y_1 = 1.6 \text{ mm}$ so vorgegeben, daß der dimensionslose Wandabstand in den Rechnungen im Bereich von 30 bis 100 liegt und somit der Gültigkeitsbereich der verwendeten Modelle stets eingehalten wird. Zur Simulation der Beheizung wird ein konstanter Wärmestrom von $q_w = 1000 \text{ W/m}^2$ an der Wand vorgegeben.

Im Austritt mit der axialen Position $z/d_h = 100$ wird an einem Punkt der Umgebungsdruck vorgegeben. Bei Verwendung linearer Modelle des Reynoldsschen Spannungstensors wird im Austritt ein konstanter Druck vorgegeben, wodurch die Berechnung zu Beginn stabiler wird, was aber auf das konvergierte Ergebnis ohne Einfluß ist.

5.2.1. Netzabhängigkeit der Lösung

Voraussetzung der Modellbewertung ist die Verwendung netzunabhängiger Lösungen. Daher wird zuerst ein Netz ermittelt, das so fein ist, daß bei weiterer Netzverfeinerung die integralen Werte wie Reibungsbeiwert und Nußelt-Zahl sich um weniger als 1% ändern und in der Darstellung der in den Abbildungen 2.3 bis 2.6 wiedergegebenen Größen keine Veränderung der Lösung erkennbar ist.

Alle in diesem Abschnitt durchgeführten Rechnungen wurden mit dem Standard- k - ε -Modell durchgeführt. Die Modellkonstanten wurden der ersten Spalte aus Tabelle A.1 auf Seite 137 entnommen und die turbulente Prandtl-Zahl wurde zu 0.9 gesetzt.

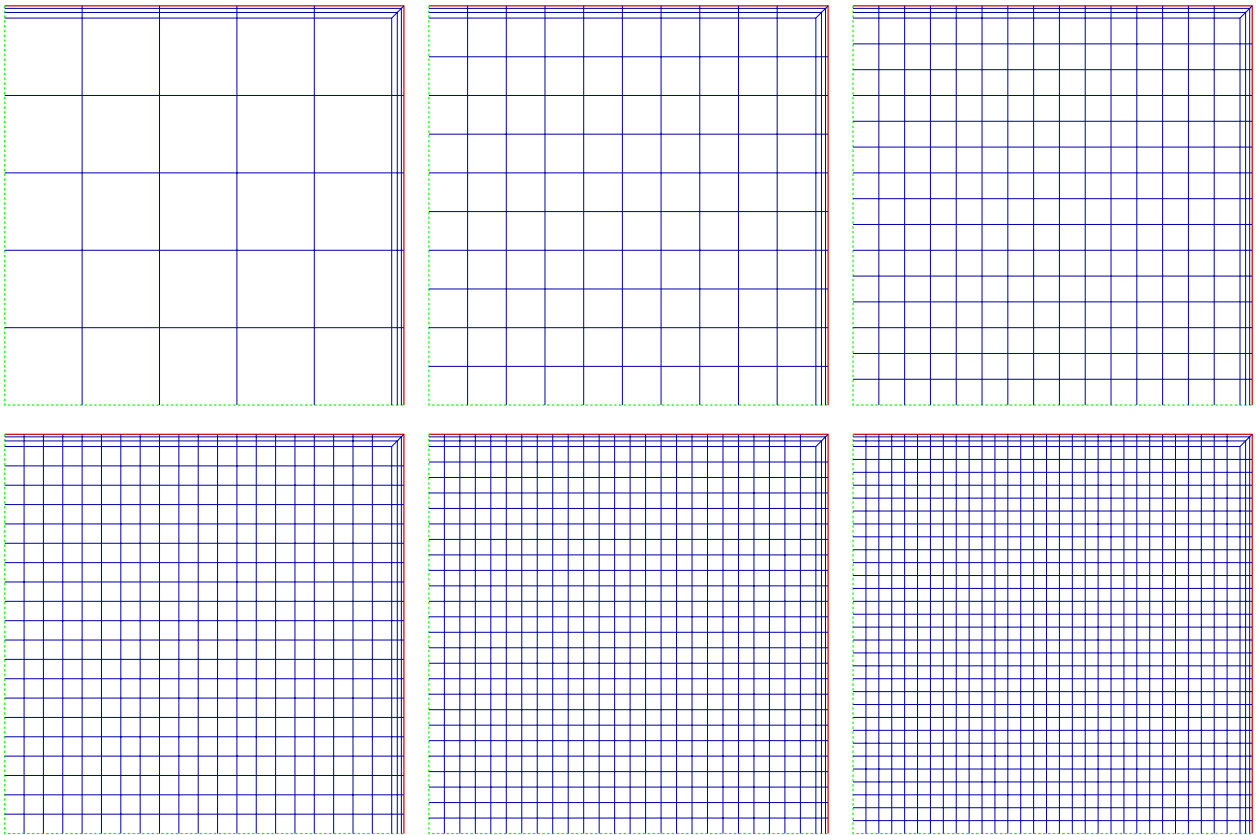


Abbildung 5.6.: Unterschiedliche Vernetzungen der Querschnittsfläche im Inneren

Zuerst wurde die Anzahl axialer Netzebenen mit 35 und die Anzahl von drei wandnahen Elementen konstant gehalten und die Anzahl der Elemente im verbleibenden inneren Bereich von 5 bis 30 in Schritten von 5 variiert. Abbildung 5.6 zeigt die Vernetzungen der Querschnittsfläche. Als Abbruchkriterium wurde das Fallen der Maximumnormen der Differenzen der normierten Variablen auf unter 10^{-4} für die turbulente Dissipation und auf unter 10^{-5} für alle anderen Variablen gewählt. Bei Relaxationsfaktoren von 1.0 für Druck und Temperatur, 0.7 für die Turbulenzfeldgrößen und 0.25 für die Geschwindigkeit wurde damit innerhalb von etwa 160 Iterationen eine Reduzierung der Differenzen- und Residuennormen um mindestens fünf Größenordnungen erzielt.

Die berechneten Werte für den Reibungsbeiwert und die Nußelt-Zahl sind in Tabelle 5.4 wiedergegeben und zeigen gut die erwartete Konvergenz mit zunehmender Netzfeinheit. Die Fehler in Reibungsbeiwert und Nußelt-Zahl reduzieren sich wieder mit zweiter Ordnung.

Elementanzahl	5	10	15	20	25	30	∞
λ_f	0.01543	0.01432	0.01412	0.01405	0.01402	0.01400	0.01396
Nu	378.4	348.5	342.9	340.7	339.6	339.0	337.7

Tabelle 5.4.: Reibungsbeiwert und Druckverlust bei $z/d_h = 84$ für unterschiedliche Vernetzungen der Querschnittsfläche im Inneren nach Abbildung 5.6

Die extrapolierten Werte zeigen, daß die integralen Werte des Netzes mit 20 Elementen im Inneren weniger als 1% Abweichung von den extrapolierten Werten für ein Netz mit unendlich vielen Elementen im Inneren aufweisen. Bei 20 Elementen und mehr ist auch in den Abbildungen analog zu 2.3 bis 2.6 keine Differenz erkennbar. Daher werden im weiteren 20 Elemente im inneren Bereich verwendet.

Ein Wandelement					
y_2/y_1	1.125	1.25	1.5	2.0	3.0
λ_f	0.01606	0.01530	0.01474	0.01434	0.01450
Nu	395.0	373.5	358.4	348.1	352.4
Zwei Wandelemente					
y_2/y_1	1.5	2.0	2.0	2.0	2.0
y_3/y_1	2.5	3.0	3.5	4.25	5.0
λ_f	0.01417	0.01411	0.01410	0.01405	0.01422
Nu	343.9	342.0	341.7	340.7	345.3

Tabelle 5.5.: Reibungsbeiwert und Druckverlust bei $z/d_h = 84$ für unterschiedliche Vernetzungen in Wandnähe

In einem zweiten Schritt wurden die wandnahen Elemente in Anzahl und Ausdehnung variiert. Für die oben wiedergegebenen Rechnungen mit drei Wandelementen gilt $y_2/y_1 = 1.5$, $y_3/y_1 = 2.3$ sowie $y_4/y_1 = 3.4$. Die getesteten Kombinationen mit einem und zwei Wandelementen sind in Tabelle 5.5 wiedergegeben. Zusammen mit dem Vergleich der Verläufe der Geschwindigkeit und der Turbulenzenergie wurde die Kombination mit zwei wandnahen Elementen und $y_2/y_1 = 2.0$ sowie $y_3/y_1 = 3.5$ als geeignet zur Erzielung netzunabhängiger Lösungen ausgewählt. Bei dem ausgewählten Netz entspricht die Dicke der wandnächsten Schicht dem Abstand der wandnächsten Knoten von der Wand und die folgende Schicht ist 1.5-mal so dick. Diese Kombination wird bei allen weiteren Berechnungen des quadratischen Kanals verwendet.

In einem weiteren Schritt wurde die Anzahl der Netzebenen variiert. Abbildung 5.7 gibt die Lage der Ebenen in z -Richtung und Tabelle 5.5 die Werte für den Reibungsbeiwert und die Nußelt-Zahl wieder. Anzahl und Lage der Ebenen beeinflussen den praktisch voll entwickelten Zustand bei $z/d_h = 84$ wie erwartet kaum. Anhand des Vergleichs der Entwicklung der Geschwindigkeits- und Turbulenzenergiefelder konnte kein Unterschied der Ergebnisse für 25

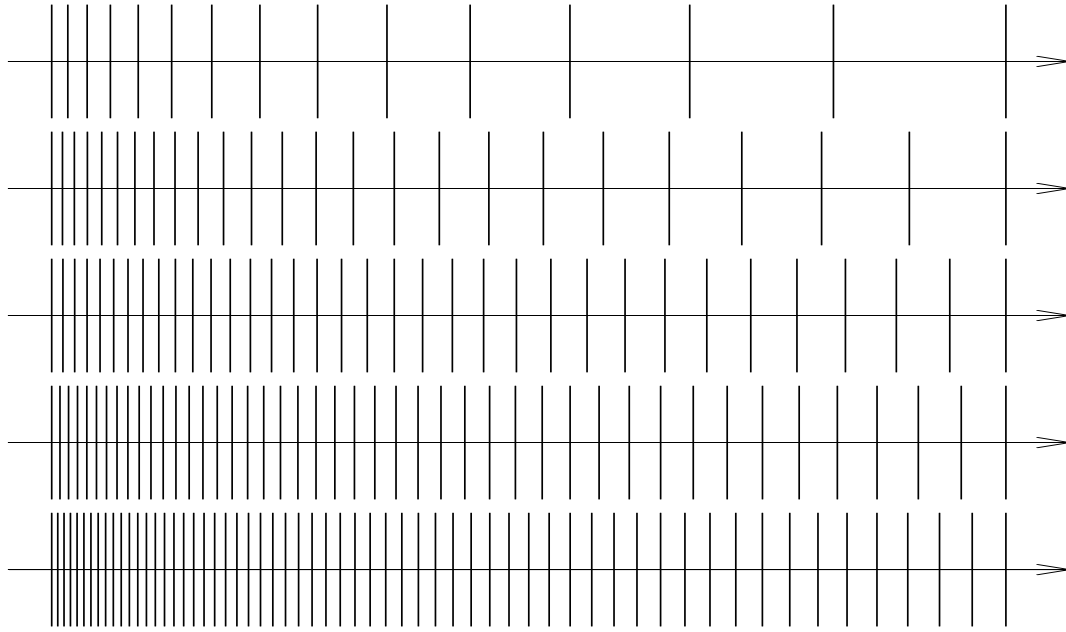


Abbildung 5.7.: Unterschiedliche Lage der Netzebenen für 15, 25, 35, 45 und 60 Netzebenen

Netzebenenanzahl	15	25	35	45	60
λ_f	0.01415	0.01406	0.01410	0.01406	0.01400
Nu	341.7	341.8	341.7	341.7	341.8

Tabelle 5.6.: Reibungsbeiwert und Druckverlust bei $z/d_h = 84$ für unterschiedliche axiale Vernetzungen nach Abbildung 5.7

und mehr Netzebenen festgestellt werden. Die weiteren Simulationen werden deshalb immer mit 25 Netzebenen durchgeführt. Das so festgelegte Netz ist in Abbildung 5.8 wiedergegeben. Die Anzahl der Netzknoten beträgt 13075 und alle Elementinnenwinkel liegen im Bereich von 45 bis 135 Grad. Die erhebliche lokale Elementstreckung von etwa 1 : 1600 führt zu keinen merklichen Nachteilen bei der numerischen Lösung der Gleichungssysteme.

Neben der Netzabhängigkeit der Lösung wurde auch der Konvergenzfehler für unterschiedliche Abbruchbedingungen untersucht. Das Abbruchkriterium entspricht der Schranke, unter die die Maximumnorm der Differenzen aller normierten Variablen fallen muß. Ausgenommen wurde die turbulente Dissipation, deren Abbruchschranke eine Größenordnung höher gewählt wurde, da ihre Differenzennorm im Vergleich mit den anderen Differenzennormen aufgrund der Normierung mindestens eine Größenordnung größer ist.

Die Ergebnisse in Bezug auf den Reibungsbeiwert und die Nußelt-Zahl, die in Tabelle 5.7 wiedergegeben sind, zeigen wie die Entwicklung der Geschwindigkeits- und Turbulenzenergiefelder und der Wandschubspannung, daß bereits ein Abbruchkriterium von 10^{-2} hinreichend ist und ab einem Abbruchkriterium von 10^{-3} keine Unterschiede in den Lösungen mehr sichtbar sind.

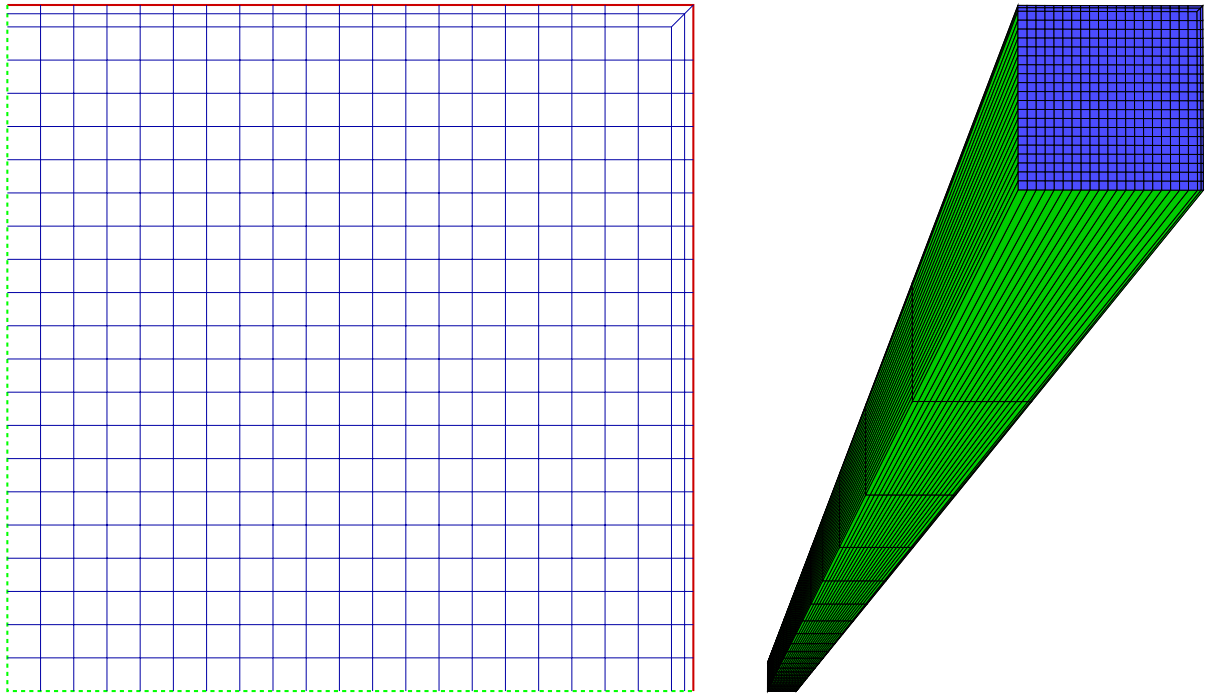


Abbildung 5.8.: Vernetzung des quadratischen Kanals für die Berechnung der turbulenten Strömung

Abbruchkriterium	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-9}
Iterationsanzahl	54	73	89	109	190
λ_f	0.01404	0.01408	0.01407	0.01406	0.01406
Nu	341.8	341.8	341.8	341.8	341.8

Tabelle 5.7.: Anzahl der Picarditerationen sowie Reibungsbeiwert und Druckverlust bei $z/d_h = 84$ für unterschiedliche Abbruchkriterien

Aus Abbildung 5.9 geht hervor, daß die Maximumnormen der Residuen und Differenzen für das Abbruchkriterium 10^{-3} um vier bis fünf Größenordnungen fallen. Für die folgenden Rechnungen wurde als Abbruchkriterium die Unterschreitung der folgenden oberen Schranken für die Maximumnormen der Differenzen der normierten Variablen festgelegt: 10^{-4} für Geschwindigkeit und Temperatur, 10^{-3} für die Turbulenzenergie und 10^{-2} für deren Dissipation.

Die Nachschaltung der in Abschnitt 3.3 beschriebenen Druckkorrekturmethode nach Gleichung (3.16) zeigt keine sichtbaren Veränderungen im Verlauf der Feldvariablen und liefert mit $\lambda_f = 0.01408$ auch den gleichen Druckverlustbeiwert. Für lineare Turbulenzmodelle ist die langsamer konvergierende Druckkorrekturmethode damit nicht notwendig.

Die mit dem festgelegten Netz und den genannten Abbruchkriterien erzielten Lösungen sind in den Abbildungen 5.10 bis 5.13 dargestellt.

Die Berechnung einer eingelaufenen Lösung für das Geschwindigkeitsfeld und die Turbulenzgrößen erfolgte mit Relaxationsfaktoren von 1.0 für den Druck und 0.9 für alle anderen

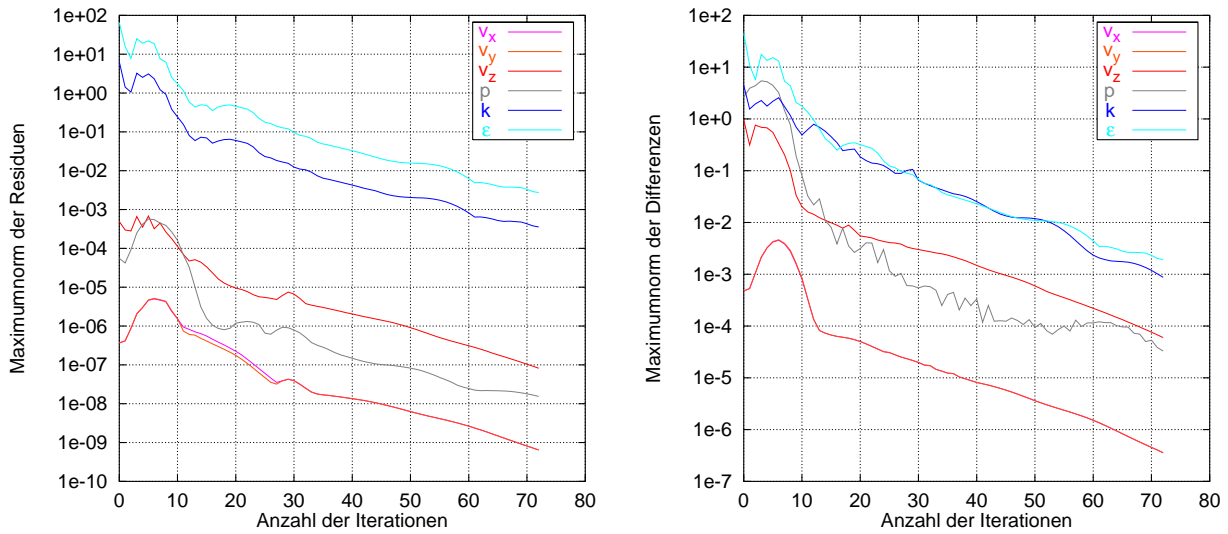


Abbildung 5.9.: Verlauf der Residuen- und Differenznormen für die Simulation der turbulenten Strömung durch einen quadratischen Kanal

Größen. Mit den gleichen Abbruchkriterien konvergierte die Simulation in 64 Iterationen. Der berechnete Reibungsbeiwert von $\lambda_f = 0.01390$ stimmt mit dem Wert der sich entwickelnden Strömung nach 84 hydraulischen Durchmessern sehr gut überein. Auch die berechneten Feldgrößen stimmen, wie die Abbildungen 5.10 bis 5.13 belegen, gut mit den Ergebnissen der einlaufenden Strömung für $z/d_h = 84$ überein.

Ein Vergleich mit den bereits in Kapitel 2 wiedergegebenen Ergebnissen der Programme $\mathcal{N3S}$ und $\mathcal{FLOTTRAN}$ zeigt, daß die hier erzielten Ergebnisse nah an den Resultaten des Programms $\mathcal{N3S}$ liegen und die deutliche Diskrepanz zu den unter Zugrundelegung der gleichen Modelle mit $\mathcal{FLOTTRAN}$ erzielten Ergebnisse – wie der teilweise nicht plausible Verlauf bereits vermuten ließ – nicht auf die verwendeten Modelle zurückzuführen ist. Die den hier und mit $\mathcal{N3S}$ Ergebnissen gemeinsamen qualitativen Abweichungen von den Messungen sind damit auf eine unzureichende Modellierung zurückzuführen und nicht Fehler der angewendeten Numerik. Der mit dem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Programm berechnete Druckverlustbeiwert stimmt im Gegensatz zum von $\mathcal{N3S}$ vorhergesagten Wert im Rahmen der Meßgenauigkeit mit dem experimentellen Resultat überein.

Die Übereinstimmung der hier erzielten Lösung mit den Ergebnissen des Programms $\mathcal{N3S}$ und die gute Wiedergabe des Druckverlusts bestätigt die Leistungsfähigkeit des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten numerischen Verfahrens und rechtfertigt auch die neuen Ansätze beispielsweise bei der Behandlung des wandnahen Bereichs.

5.2.2. Bewertung linearer Turbulenzmodelle

In diesem Abschnitt werden von dem Standard- k - ε -Modell abweichende Modellierungen und Koeffizientensätze sowie unterschiedliche Modelle zur Simulation des wandnahen Bereichs

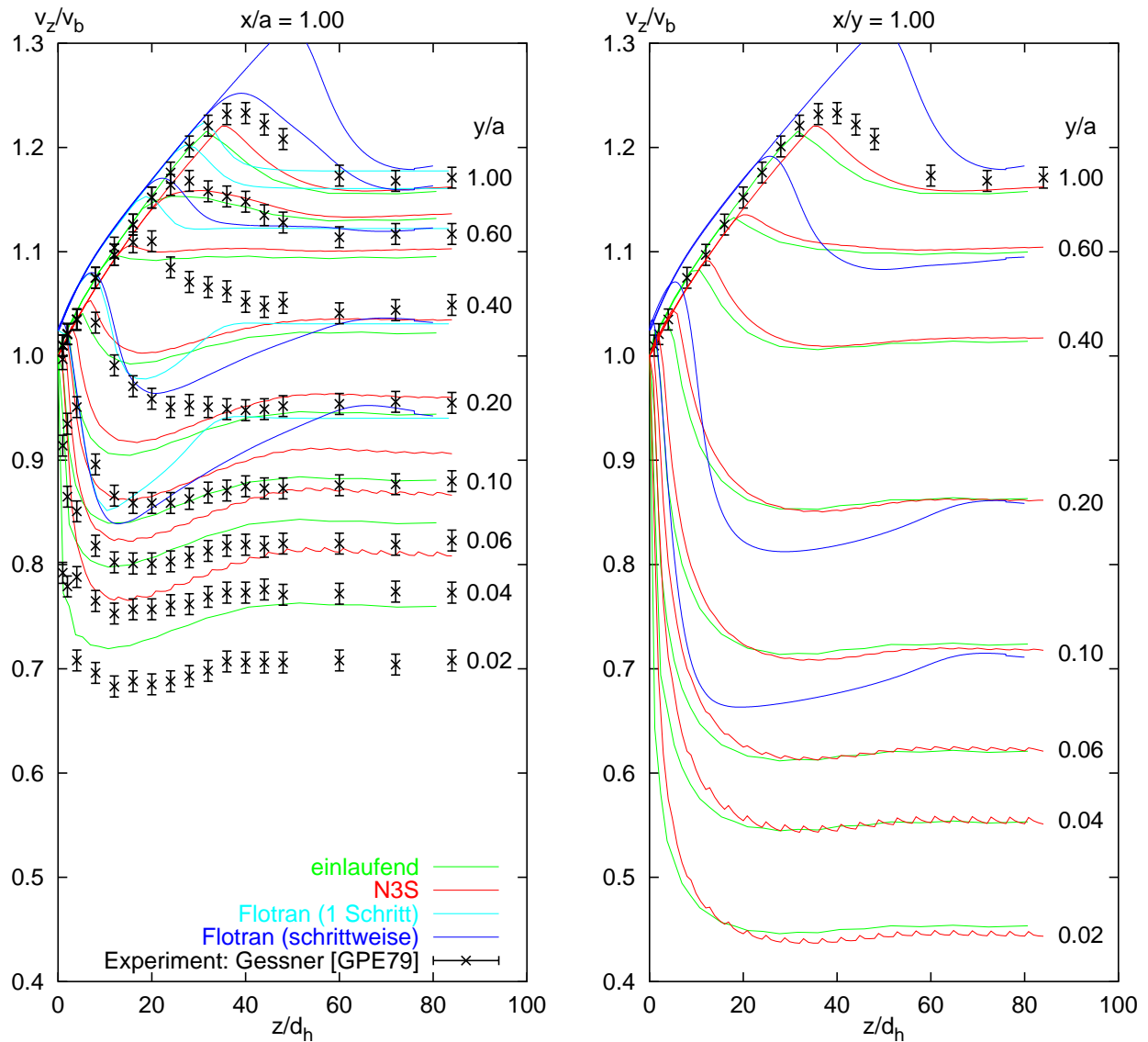


Abbildung 5.10.: Entwicklung der axialen Geschwindigkeitskomponente über der Kanallänge für unterschiedliche Positionen zwischen Wandmitte bzw. Ecke und Kanalzentrum

gegenübergestellt. Allen verwendeten Modellen ist gemein, daß der Reynoldssche Spannungstensor proportional zum Deformationstensor ist. Nichtlineare Ansätze für den Reynoldsschen Spannungstensor werden im folgenden Abschnitt bewertet.

Für alle Modelle wurde der eingelaufene und der einlaufende Fall berechnet. Die in den Tabellen 5.8 bis 5.10 wiedergegebenen Druckverlustbeiwerte zeigen eine gute Übereinstimmung der Werte der entwickelten Strömung mit den Werten bei $z/d_h = 84$. Die Werte der entwickelten Strömung sind immer etwa 1% kleiner als die bei $z/d_h = 84$. Es wurden – sofern nicht ausdrücklich gekennzeichnet – immer das gleiche Netz sowie dieselben Randbedingungen, Relaxationsfaktoren, Wandmodelle, Gleichungslöser usw. verwendet wie in Abschnitt 5.2.1 genannt. Die angegebene Anzahl der Iterationen gilt immer für die Berechnung

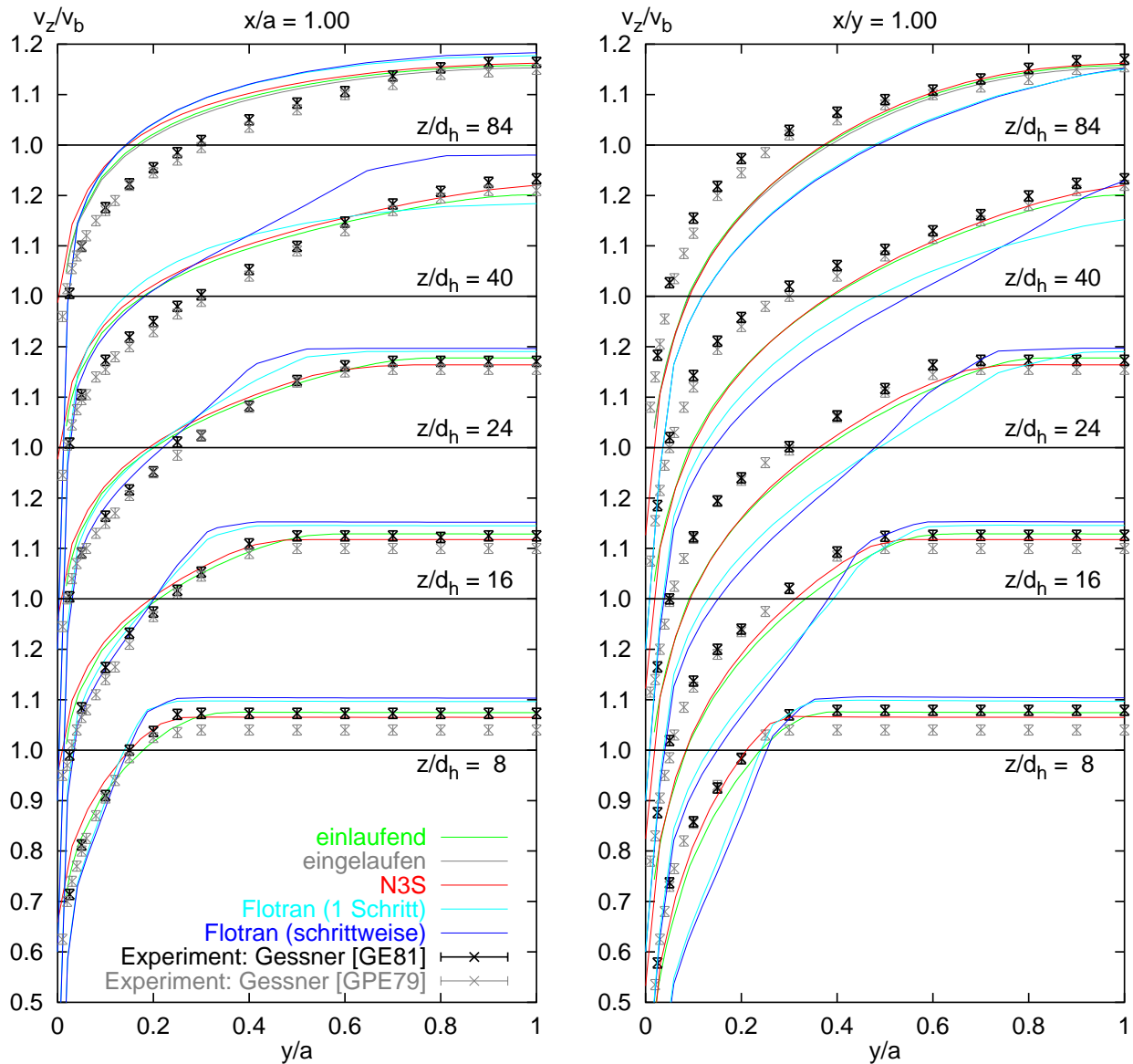


Abbildung 5.11.: Verlauf der axialen Geschwindigkeitskomponente auf Geraden von der Wandmitte und der Ecke zum Kanalzentrum für unterschiedliche axiale Positionen

der einlaufenden Strömung und kann unter der Einschränkung, daß sich durch Wahl anderer Relaxationsfaktoren günstigere Werte für manche Modelle ergeben können, als Richtwert für den numerischen Aufwand dienen.

Eine Variation der Koeffizienten des Standard- k - ε -Modells nach Tabelle A.1 führt auf die in Tabelle 5.8 wiedergegebenen Ergebnisse. Der Vergleich von Geschwindigkeit- und Turbulenzenergie mit den experimentellen Ergebnissen zeigt immer die bei linearen Modellen zu erwartenden Abweichungen aufgrund der fehlenden Sekundärströmungen. Die besten Ergebnisse lassen sich mit den Koeffizienten nach [GS92] erzielen. Auch die Koeffizienten nach [NT90] führen zu guten Ergebnissen. Signifikant aus dem Rahmen fällt das Ergebnis bei Anwen-

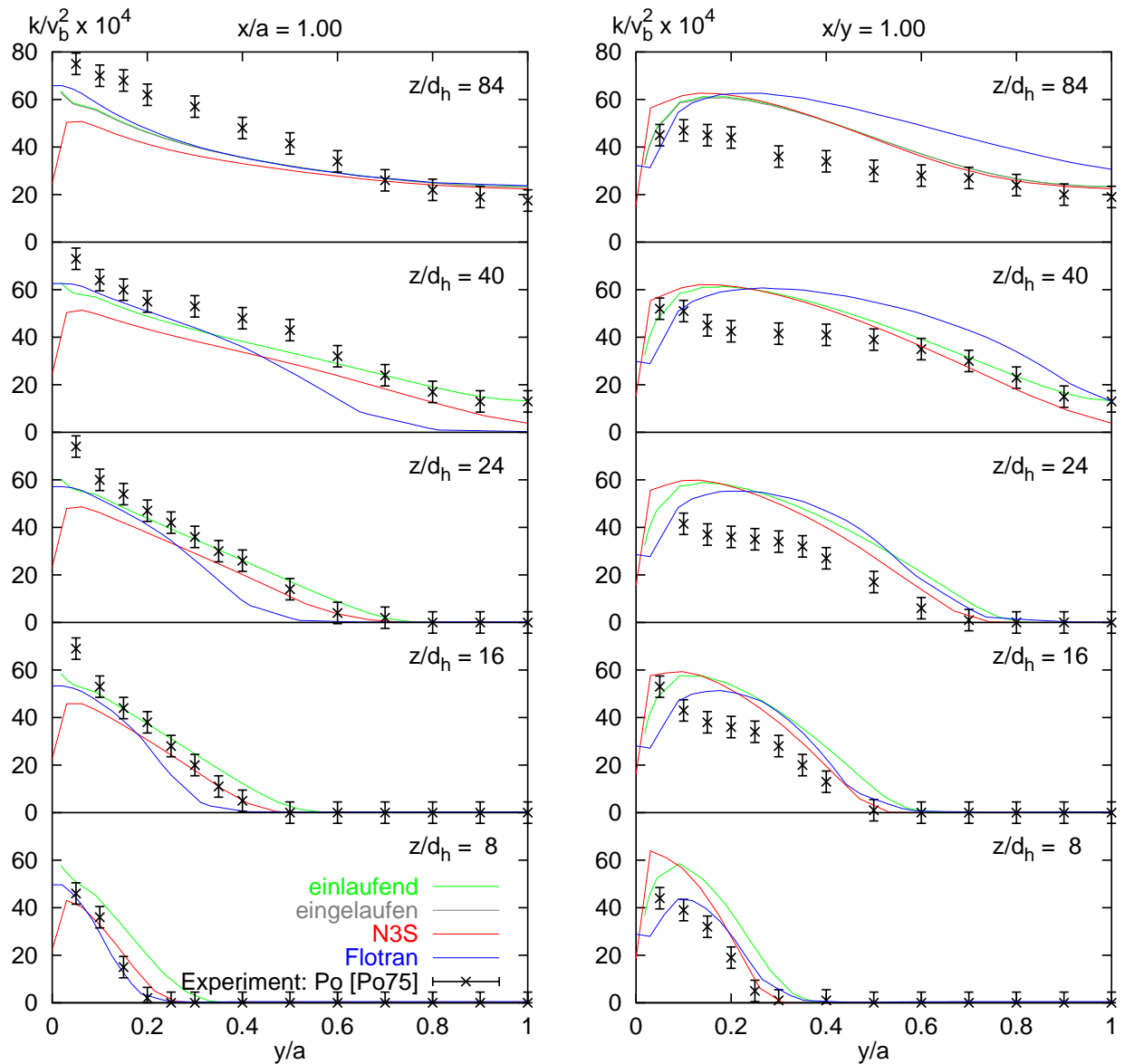
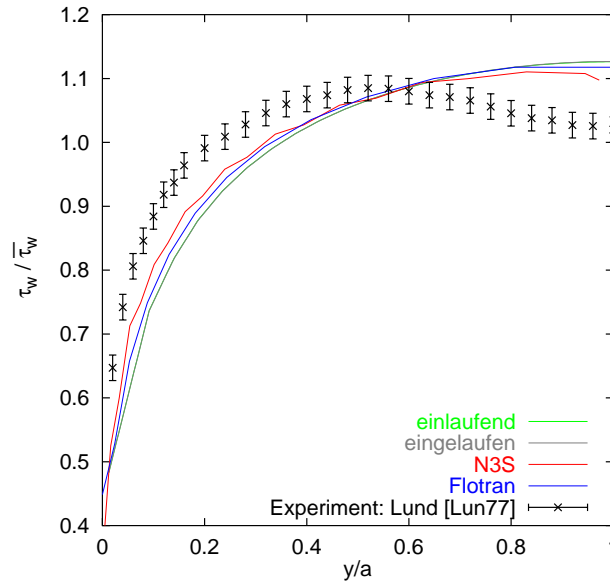


Abbildung 5.12.: Verlauf der Turbulenzenergie auf Geraden von der Wandmitte und der Ecke zum Kanalzentrum für unterschiedliche axiale Positionen

dung der Koeffizienten nach [YOT+92]. Diese Koeffizienten sind nur in Verbindung mit der entsprechenden Modellmodifikation sinnvoll.

Die in Kapitel 3.1.2 beschriebenen Modifikationen der Transportgleichung für die Dissipation der Turbulenzenergie ε bewirken eine geringere Stabilität, sodaß bei den Rechnungen die ersten 20 Iterationen mit dem Standard- k - ε -Modell durchgeführt wurden. Ein gutes Ergebnis liefert das RNG-Modell nach [YOT+92] bei Verwendung der dazugehörigen Koeffizienten. Aufgrund der schlechten Ergebnisse verbietet sich eine Verwendung des Modells nach [YOT+92] mit Standardkoeffizienten genauso wie die Verwendung des Standardmodells mit den Koeffizienten nach [YOT+92]. Die Modellmodifikation nach [SLS+94] brachte keine Verbesserung des Ergebnisses und ist aufgrund der notwendigen hohen Iterationsanzahl mit

Abbildung 5.13.: Verlauf der Wandschubspannung im eingelaufenen Fall ($z/d_h = 84$)

Koeffizienten	$\lambda_{f,\text{eingelaufen}}$	$\lambda_{f,z/d_h=84}$	$\text{Nu}_{z/d_h=84}$	Iterationen
[LS74], [Ben88b]	0.01390	0.01408	342	73
[HL72]	0.01433	0.01450	355	69
[HL76]	0.01419	0.01436	351	69
[MK90], [MK91]	0.01336	0.01356	327	81
[NT90]	0.01373	0.01390	338	90
[GS92]	0.01325	0.01345	322	74
[YOT ⁺ 92]	0.01009	0.01022	230	91
[SLS ⁺ 94]	0.01359	0.01378	333	71

Tabelle 5.8.: Ergebnisse für die Strömung durch einen quadratischen Kanal für unterschiedliche Koeffizientensätze unter Verwendung des Standard- k - ε -Modells

numerisch deutlich erhöhtem Aufwand verbunden. Eine Wirkung der Dämpfungsfunktion f_2 nach Gleichung (A.14), die im wandnahen Bereich Anwendung findet und die Wirkung kleiner lokaler Reynolds-Zahlen modelliert wie sie im Zentrum vor Ausbildung der turbulenten Kernströmung zu finden sind, auf die Kernströmung ist nicht erkennbar.

Weiterhin wurde die Wirkung der Verwendung der Modellierung des Koeffizienten c_μ wie er in nichtlinearen Modellen angewendet wird überprüft, da nach [Bä00] der Einfluß der c_μ -Funktion den Einfluß der nichtlinearen Terme in manchen Strömungen dominiert. Die Einführung der Nichtlinearität in c_μ erfolgt aus Stabilitätsgründen sukzessive innerhalb der ersten 10 Iterationen. Der erhöhte Aufwand ist bei der Strömung durch einen quadratischen Kanal jedoch nicht gerechtfertigt, da keine Verbesserung gegenüber dem Standard- k - ε -Modell mit Koeffizienten nach [GS92] oder dem Modell nach [YOT⁺92] erreicht wird. Von allen getesteten Modellvarianten mit variablem c_μ liefert die Variante [Gir95]-[Tau92]-HGC die besten Ergebnisse.

Modifikation	Koeffizienten	$\lambda_{f,\text{eingelaufen}}$	$\lambda_{f,z/d_h=84}$	$\text{Nu}_{z/d_h=84}$	Iterationen
[YOT+92]	[YOT+92]	0.01301	0.01318	316	113*
[YOT+92]	[LS74], [Ben88b]	0.01647	0.01663	420	69
[SLS+94]	[SLS+94]	0.01326	0.01342	324	184*
[SLS+94]	[LS74], [Ben88b]	0.01366	0.01381	336	167*
f_2 nach (A.14)	[LS74], [Ben88b]	0.01390	0.01409	342	78

* davon die ersten 20 Iterationen mit dem Standard- k - ε -Modell

Tabelle 5.9.: Ergebnisse für die Strömung durch einen quadratischen Kanal für unterschiedliche Koeffizientensätze unter Verwendung modifizierter Transportgleichungen für die Turbulenzfeldgrößen

Ansatz für c_μ	Koeffizienten	$\lambda_{f,\text{eingelaufen}}$	$\lambda_{f,z/d_h=84}$	$\text{Nu}_{z/d_h=84}$	Iterationen
[SLS+94]	[SLS+94]	0.01354	0.01373	330	80
[SLS+94]	[LS74]	0.01385	0.01398	339	100
[SLS+94]	[GS92]	0.01320	0.01336	320	106
[SZL94b]	[SLS+94]	0.01269	0.01290	308	85
[SZL94b]	[LS74]	0.01297	0.01317	316	85
[SZL94b]	[GS92]	0.01231	0.01253	297	91
[SLS+94]*	[SLS+94]	0.01312	0.01324	316	120*
[SLS+94]*	[LS74]	0.01350	0.01362	330	123*
[SLS+94]*	[GS92]	0.01280	0.01291	309	193*
[Gir95]-[GS92]-LRR	[GS92]	0.01446	0.01455	351	105
[Gir95]-[GS92]-GL	[GS92]	0.01404	0.01415	342	110
[Gir95]-[GS92]-SSG	[GS92]	0.01322	0.01334	320	131
[Gir95]-[GS92]-HGC	[GS92]	0.01332	0.01346	323	139
[Gir95]-[Tau92]-LRR	[GS92]	0.01382	0.01397	336	93
[Gir95]-[Tau92]-GL	[GS92]	0.01351	0.01367	328	91
[Gir95]-[Tau92]-SSG	[GS92]	0.01304	0.01319	316	116
[Gir95]-[Tau92]-HGC	[GS92]	0.01296	0.01310	314	116

* Modell nach [SLS+94] und den ersten 20 Iterationen mit dem Standard- k - ε -Modell

Tabelle 5.10.: Ergebnisse für die Strömung durch einen quadratischen Kanal für unterschiedliche Koeffizientensätze unter Verwendung nichtkonstanter Ansätze für c_μ

Die Verwendung von anderen Wandmodellen als dem konventionellen Eingeschwindigkeitsmodell erfordert zur Erzielung eines numerisch effizienten und stabilen Verfahrens, daß die ersten Iterationen mit dem konventionellen Eingeschwindigkeitsmodell ausgeführt werden. Die in Abschnitt 2.1.3 beschriebene Alternative des Zweigeschwindigkeitsmodells unter Verwendung der Geschwindigkeit u_k konvergiert nur langsam (182 Iterationen) und nur unter Herabsetzung des Relaxationsfaktors für die Turbulenzfeldgrößen auf 0.5. Da zudem der so berechnete Druckverlustbeiwert mit $\lambda_{f,\text{eingelaufen}} = 0.01256$ signifikant zu klein ist, kann die Verwendung des Zweigeschwindigkeitsmodells nicht empfohlen werden. Vergleichbar mit dem

Eingeschwindigkeitsmodell konvergiert bei unveränderten Relaxationsfaktoren die Behandlung des wandnahen Bereichs mit Hilfe eines low-Re-Modells (80 Iterationen). Es ergeben sich vergleichbare Ergebnisse. Diese Behandlung des wandnahen Bereichs wird am Ende des folgenden Abschnitts noch einmal aufgegriffen und bewertet.

Insgesamt läßt sich zur Bewertung linearer Turbulenzmodelle feststellen, daß keine Formulierung die durch das Fehlen der Sekundärströmungen bedingten Abweichungen zu beseitigen imstande ist. Die effizienteste Lösung mit der besten Übereinstimmung mit experimentellen Daten liefert das Standard- k - ε -Modell mit Koeffizienten nach [GS92]. Ein vergleichbares Ergebnis liefert das RNG-Modell nach [YOT⁺92], das einschließlich aller Koeffizienten aus den Navier-Stokesschen Gleichungen abgeleitet wurde und daher ohne die Anpassung von Koeffizienten an experimentelle Daten auskommt.

5.2.3. Bewertung nichtlinearer Turbulenzmodelle

Der Vergleich aller Modelle mit nichtlinearem Ansatz für die Reynoldsschen Spannungen erfolgt zunächst anhand des eingelaufenen Strömungsfalls und der Größen Wandschubspannung, Turbulenzenergie, axiale Geschwindigkeitskomponente und Quergeschwindigkeitskomponenten. Der einlaufende Fall wird für die Modelle berechnet, mit denen im eingelaufenen Fall die besten Ergebnisse erzielt werden konnten.

Bei $z/d_h = 84$ wurden die Quergeschwindigkeitskomponenten auf der Symmetrielinie zur Ecke experimentell zu $10^3 v_{c,\max}/v_b = 15.7 \pm 2$ und zur Wandmitte zu $10^3 v_{w,\max}/v_b = 9.0 \pm 2$ bestimmt.

Die Einführung der Nichtlinearität in c_μ erfolgt wie im vorhergehenden Abschnitt innerhalb der ersten 10 Iterationen. Nach Erzielung eines konvergenten Ergebnisses ohne Verwendung von nichtlinearen Ansätzen für die Reynoldsschen Spannungen, werden die Nichtlinearitäten in den Reynoldsschen Spannungen innerhalb von 50 Iterationen eingeführt. Das Abbruchkriterium für die Geschwindigkeit wird zur Sicherstellung der Konvergenz des Verfahrens auf 10^{-5} um eine Größenordnung verschärft und der Druck mittels der in Abschnitt (3.3) beschriebenen Druckkorrekturgleichung (3.16) berechnet.

Zuerst werden nichtlineare Modelle der Form (3.3) mit konstanten Koeffizienten, die in Tabelle A.2 wiedergegeben sind, geprüft.

Es konnten die in Tabelle 5.11 im oberen Teil wiedergegebenen Modellkombinationen erfolgreich zur Konvergenz gebracht werden. Die Koeffizienten nach [Bak82] liefern wie erwartet deutlich zu kleine Sekundärströmungen. Bessere Ergebnisse resultieren aus der Verwendung der Koeffizienten nach [RB90]. Dabei wird das beste Ergebnis bei Anwendung des RNG-Modells erzielt. Die Ergebnisse sind erstaunlich gut, wenn man bedenkt, daß die Koeffizienten ohne Anpassung an Experimente gewonnen wurden.

Die besten Ergebnisse bei Verwendung konstanter Koeffizienten werden jedoch erzielt mit den in [GS92] wiedergegebenen Koeffizienten.

Nichtlinearität	k - ε -Modell	$\lambda_{f,\text{eingelaufen}}$	$10^3 v_{c,\text{max}}/v_b$	$10^3 v_{w,\text{max}}/v_b$
[GS92]	[GS92]	0.01345	7.79	4.71
[GS92]*	[GS92]	0.01345	7.79	4.71
[GS92]	[LS74]	0.01407	7.08	4.09
[GS92]	[NT90]	0.01388	7.76	4.73
[GS92]	[YOT+92]	0.01327	8.48	4.82
[Bak82]	[Bak82]	0.01449	1.32	0.81
[Bak82]	[GS92]	0.01328	2.82	1.67
[Bak82]	[LS74]	0.01393	2.61	1.53
[Bak82]	[NT90]	0.01375	2.68	1.70
[Bak82]	[YOT+92]	0.01303	3.19	1.82
[RB90]	[GS92]	0.01321	4.66	3.21
[RB90]	[LS74]	0.01340	4.56	3.11
[RB90]	[NT90]	0.01404	4.11	2.80
[RB90]	[YOT+92]	0.01385	4.31	3.05
[SZL94b]	[GS92]	0.01300	17.08	27.73
[SZL94b]	[LS74]	0.01353	15.29	19.93
[SZL94b]	[NT90]	0.01351	17.43	25.41
[SZL94b]	[YOT+92]	0.01185	18.44	30.73
[Gir95]-[GS92]-LRR	[GS92]	0.01460	6.35	3.09
[Gir95]-[GS92]-GL	[GS92]	0.01404	0.00	0.00
[Gir95]-[GS92]-SSG	[GS92]	0.01339	6.42	3.37
[Gir95]-[GS92]-HGC	[GS92]	0.01364	11.37	6.13
[Gir95]-[Tau92]-LRR	[GS92]	0.01393	5.63	3.07
[Gir95]-[Tau92]-GL	[GS92]	0.01351	0.00	0.00
[Gir95]-[Tau92]-SSG	[GS92]	0.01319	6.05	3.29
[Gir95]-[Tau92]-HGC	[GS92]	0.01325	10.52	6.32
[Gir95]-[GS92]-LRR	[YOT+92]	0.01546	5.72	2.50
[Gir95]-[GS92]-GL	[YOT+92]	0.01482	0.00	0.00
[Gir95]-[GS92]-SSG	[YOT+92]	0.01363	6.20	3.03
[Gir95]-[GS92]-HGC	[YOT+92]	0.01390	10.70	4.53
[Gir95]-[Tau92]-LRR	[YOT+92]	0.01490	5.33	3.99
[Gir95]-[Tau92]-GL	[YOT+92]	0.01425	0.01	0.01
[Gir95]-[Tau92]-SSG	[YOT+92]	0.01337	6.05	3.05
[Gir95]-[Tau92]-HGC	[YOT+92]	0.01340	10.39	5.29

* tensorielle Formulierung statt Ansatz (3.3)

Tabelle 5.11.: Ergebnisse für die eingelaufene Strömung durch einen quadratischen Kanal für unterschiedliche Koeffizientensätze unter Verwendung nichtlinearer Modelle für den Reynoldsschen Spannungstensor mit konstanten Koeffizienten nach Tabelle A.2 und variablen Koeffizienten nach Tabelle A.3

Noch bessere Ergebnisse als mit den Modellen mit konstanten Koeffizienten lassen sich mit Hilfe der Modelle mit variablen Koeffizienten erzielen.

Bei dem Modell nach [SZL94b] erreichen die Koeffizienten der nichtlinearen Terme für $\eta \rightarrow 0$, also im Zentrum der Strömung, den im Vergleich mit anderen Modellen mit ± 1 vom Betrag sehr großen Wert. Als Folge davon werden auch die Sekundärströmungskomponenten signifikant überschätzt und das Verfahren weniger stabil mit der Folge, daß der Relaxationsfaktor der Geschwindigkeit gegenüber den anderen Modellen etwa halbiert werden mußte.

Von den in Tabelle 5.11 im unteren Teil aufgeführten Ergebnissen liefert, wie bei der Verwendung des linearen Ansatzes, die Modellkombination [Gir95]-[Tau92]-HGC zusammen mit dem Standard- k - ε -Modell mit konstanten Koeffizienten nach [GS92] die Ergebnisse mit der besten Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen.

Wandmodell	Netz	$\lambda_{f,\text{eingelaufen}}$	$10^3 v_{c,\text{max}}/v_b$	$10^3 v_{w,\text{max}}/v_b$
Eingeschwindigkeitsmodell	standard	0.01325	10.52	6.32
Eingeschwindigkeitsmodell	fein	0.01321	10.49	6.85
low-Re- k - ε -Modell	standard	0.01452	11.16	6.54
low-Re- k - ε -Modell	fein	0.01448	11.14	7.01

Tabelle 5.12.: Ergebnisse für die eingelaufene Strömung durch einen quadratischen Kanal für unterschiedlich feine Netze und verschiedene Modelle des wandnahen Bereichs

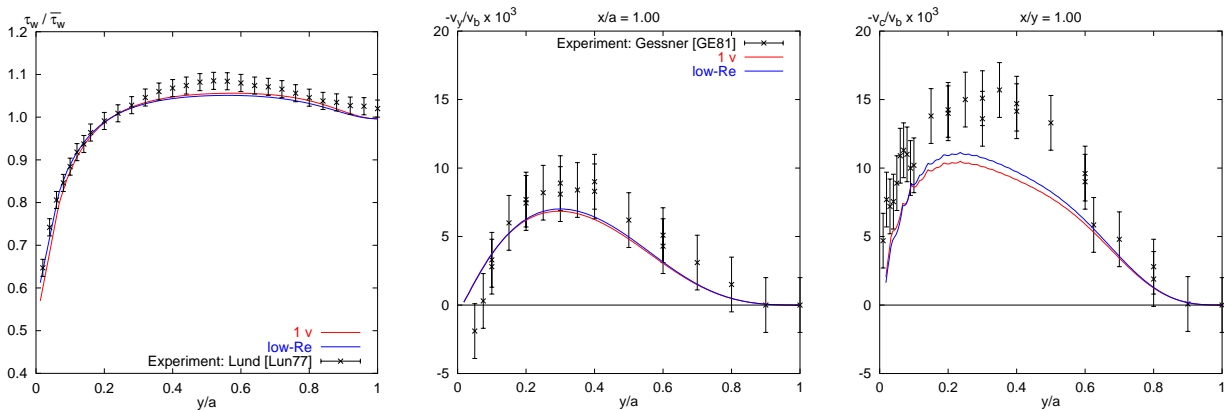


Abbildung 5.14.: Wandschubspannung und Quergeschwindigkeitskomponenten auf den Symmetrielinien zur Wand und zur Ecke im eingelaufenen Fall im Vergleich zu den experimentellen Ergebnissen bei $z/d_h = 84$

Für die Modellkombination [Gir95]-[Tau92]-HGC zusammen mit dem Standard- k - ε -Modell mit konstanten Koeffizienten nach [GS92] wurden weitere Berechnungen mit doppelt so feinem Netz und mit der Modellierung des wandnahen Bereichs mit Hilfe des low-Re- k - ε -Wandmodells durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5.12 und der Abbildung 5.14 wiedergegeben und zeigen, daß der Einfluß des Netzes gering ist. Lediglich das feinere Netz in Wandnähe kommt dem Verlauf der Quergeschwindigkeitskomponente zur Wandmitte zu gute.

Deutlicher fällt der Einfluß des Wandmodells in Bezug auf den Druckverlust und die Quergeschwindigkeitskomponente in Richtung der Ecke aus. Die Aufhebung der Gleichgewichtsbedingung von Turbulenzenergieproduktion zu -dissipation am Rand der Wandschicht bringt bei entwickelter Strömung keinen eindeutigen Vorteil.

Beide Modelle des wandnahen Bereichs liefern in Relation zu den experimentellen Ergebnissen zumindest bei vernachlässigbaren Stoffwertvariationen vergleichbar gute Resultate.

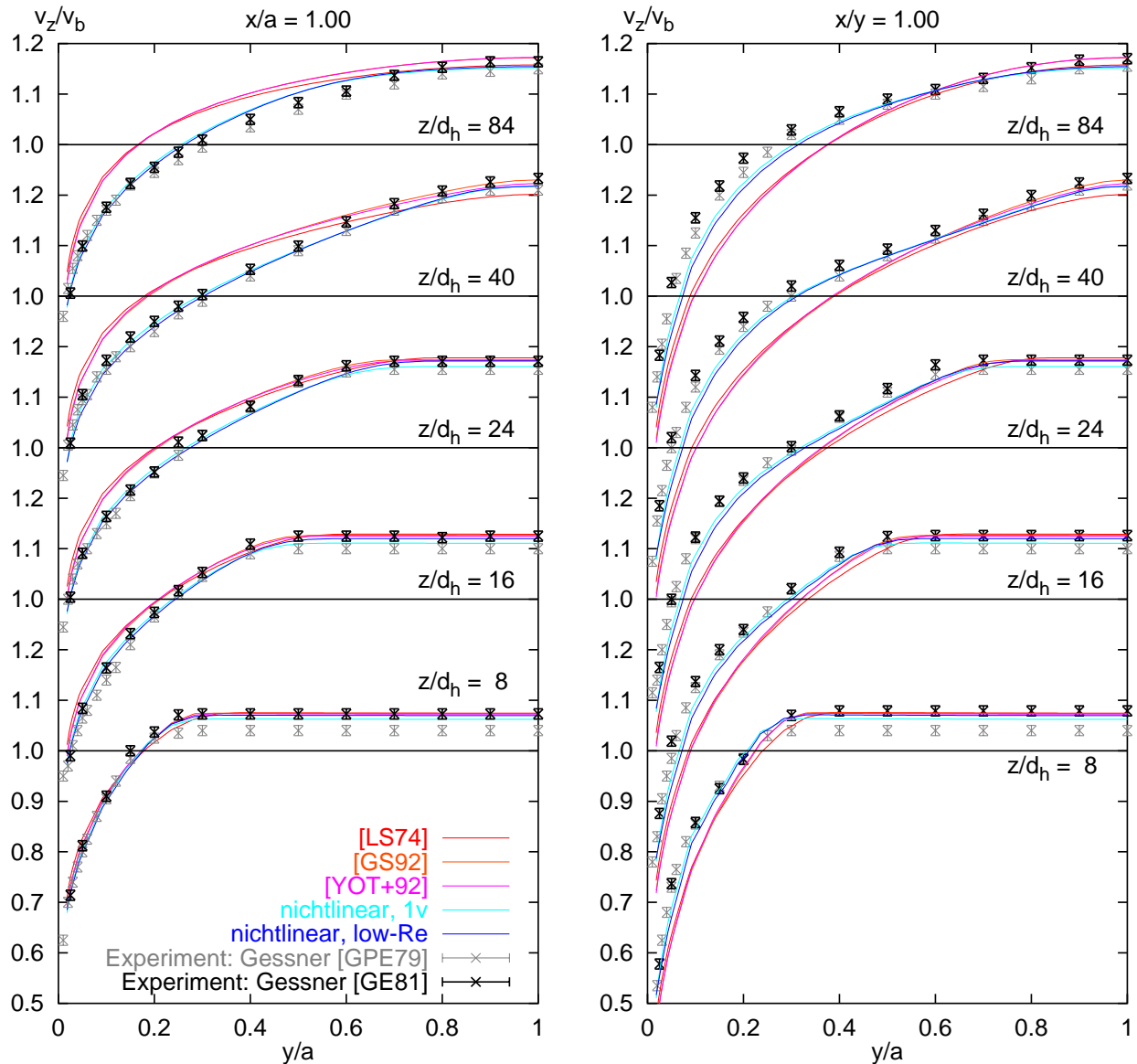


Abbildung 5.15.: Verlauf der axialen Geschwindigkeitskomponente auf Geraden von der Wandmitte und der Ecke zum Kanalzentrum für unterschiedliche axiale Positionen

Abschließend wurde mit dem nichtlinearen Modell, das im eingelaufenen Fall die besten Resultate erbracht hat, die einlaufende Strömung auf dem gleichen Netz berechnet, das

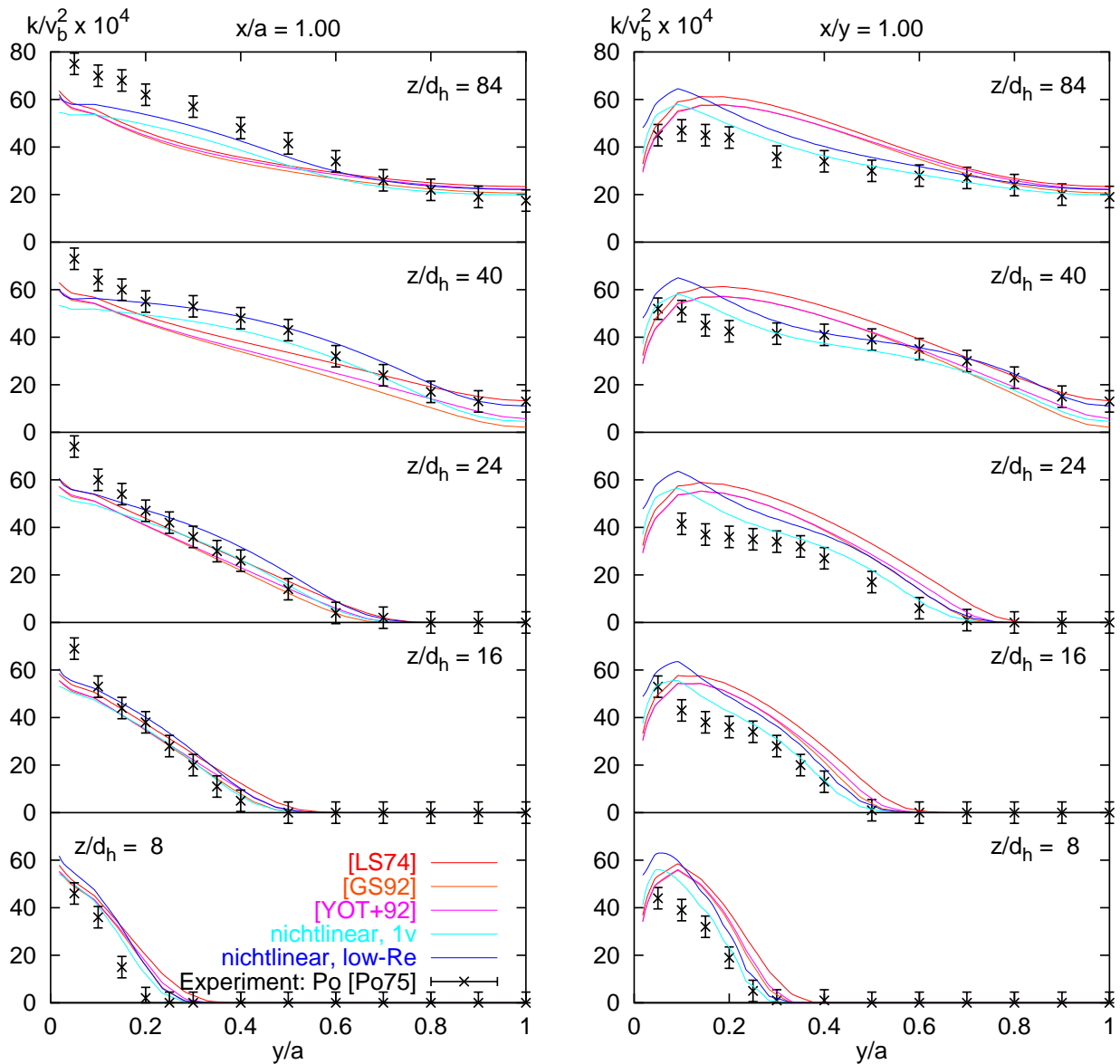


Abbildung 5.16.: Verlauf der Turbulenzenergie auf Geraden von der Wandmitte und der Ecke zum Kanalzentrum für unterschiedliche axiale Positionen

bereits bei den bisherigen Simulationen zugrundegelegt wurde. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 5.15 bis 5.20 zusammen mit den Ergebnissen des Standardmodells nach [LS74], des Modells mit konstanten Koeffizienten nach [GS92] und des RNG-Modells nach [YOT+92] wiedergegeben.

Wieder ist anhand der berechneten Feldgrößen deutlich erkennbar, daß vor allem die Einführung der nichtlinearen Modellierung des Reynoldsschen Spannungstensors die qualitativ gegenüber den Standardmodellen erheblich verbesserte Wiedergabe der gemessenen Werte bewirkt.

Der Einfluß der Modellierung des wandnahen Bereichs bleibt auch bei der einlaufenden Strömung klein, so daß die bisher betrachteten Strömungsfälle auch mit dem einfacheren Modell

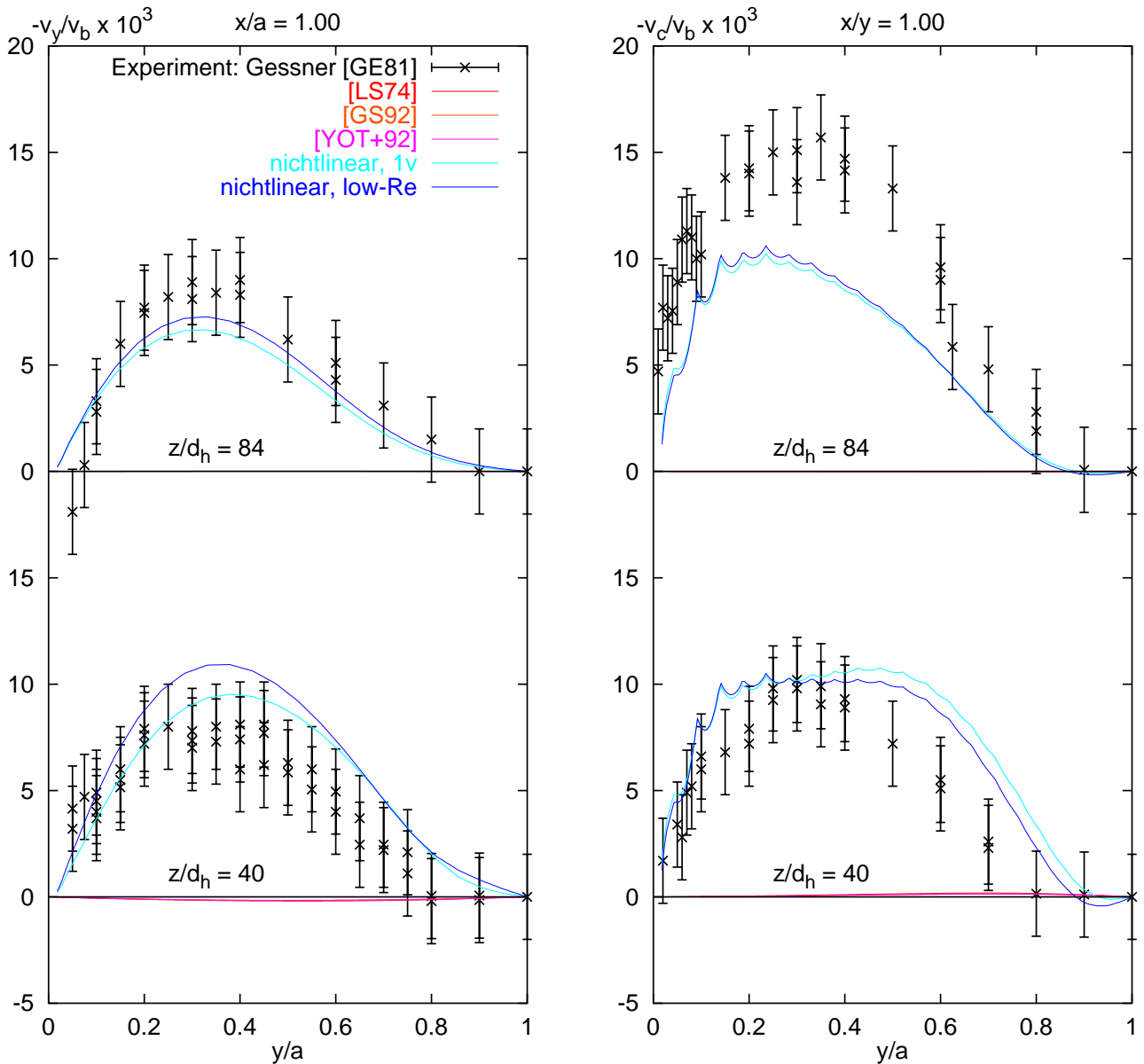


Abbildung 5.17.: Quergeschwindigkeitskomponenten auf den Symmetrielinien zur Wand und zur Ecke für unterschiedliche axiale Positionen

der universellen Wandfunktionen und der Gleichgewichtsbedingung von Turbulenzenergieproduktion zu -dissipation am Rand der Wandschicht gut wiedergegeben werden solange die Strömung isotherm ist.

Abbildung 5.17 zeigt zum einen, daß die Quergeschwindigkeitskomponenten bei $z/d_h = 84$ denen im eingelaufenen Fall bereits gut entsprechen, und zum anderen, daß das gewählte nichtlineare Modell die Quergeschwindigkeitskomponenten bei $z/d_h = 84$ tendenziell unterschätzt und bei $z/d_h = 40$ eher überschätzt. Die erhebliche qualitative Verbesserung des Simulationsergebnisses durch die Verwendung der nichtlinearen Modellierung des Reynoldsen Spannungstensors wird aber eindrucksvoll bestätigt.

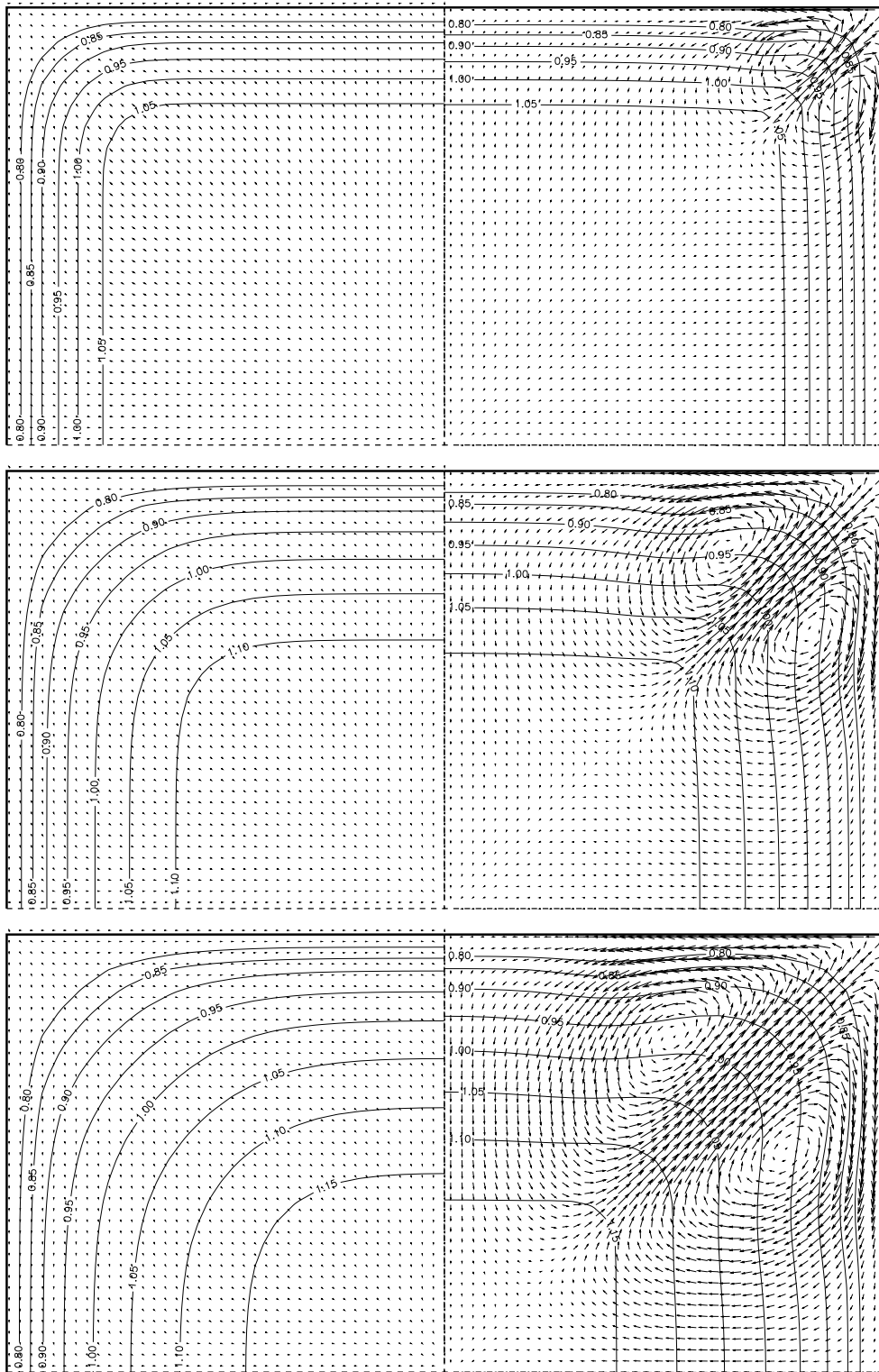


Abbildung 5.18.: Isotachen der axialen Geschwindigkeitskomponente und Sekundärströmungsvektoren für $z/d_h = 8, 16$ und 24 . Jeweils links sind die Ergebnisse des linearen Modells nach [GS92] und rechts die des nichtlinearen Modells einschließlich des low-Re- $k-\varepsilon$ -Wandmodells dargestellt.

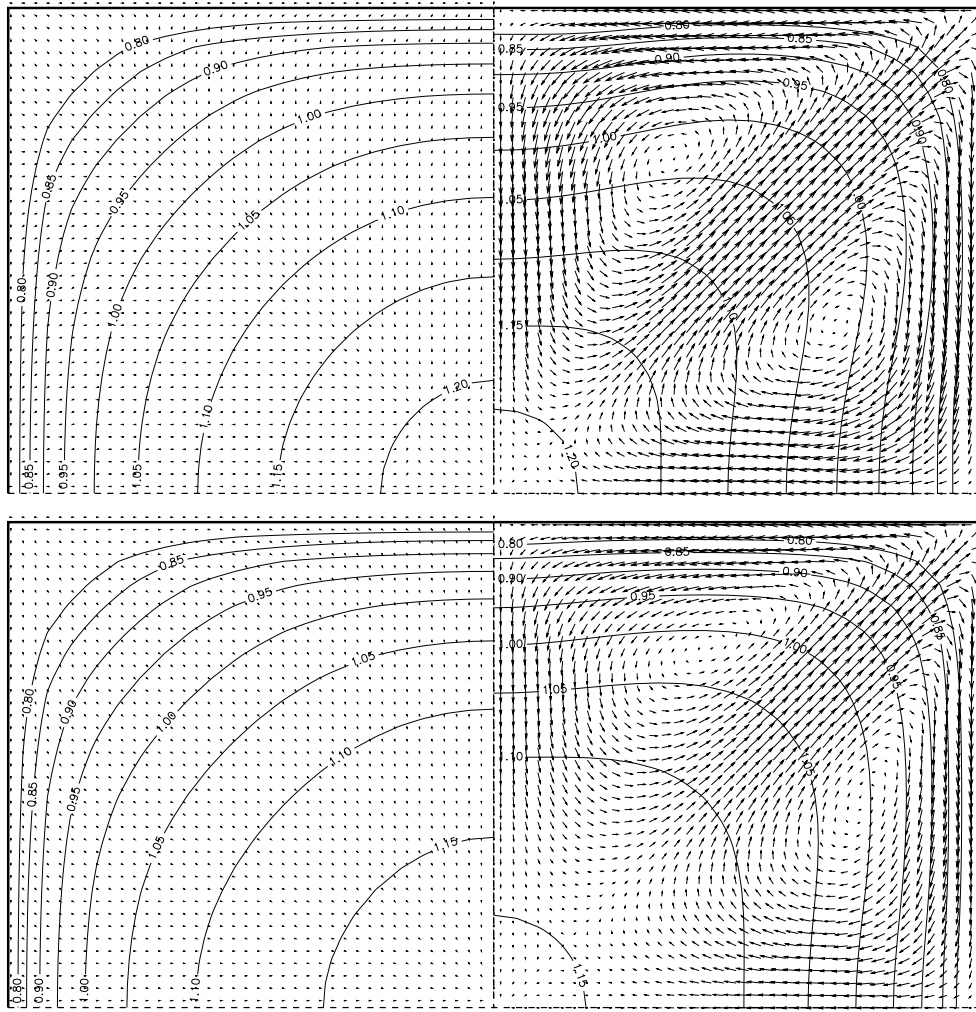


Abbildung 5.19.: Isotachen der axialen Geschwindigkeitskomponente und Sekundärströmungsvektoren für $z/d_h = 36$ und 84 . Jeweils links sind die Ergebnisse des linearen Modells nach [GS92] und rechts die des nichtlinearen Modells einschließlich des low-Re- k - ε -Wandmodells dargestellt.

In den Abbildungen 5.18 und 5.19 wird noch einmal deutlich, daß die nichtlinearen Terme nicht nur im eingelaufenen Fall einen signifikanten Einfluß auf die Querströmungen haben, sondern daß die durch die anisotrope Turbulenzviskosität bedingten Querströmungen auch im Einlauf die entsprechenden Querströmungen der linearen Modelle und damit die Querströmungen in kreisförmigen Kanälen weit übertreffen.

Die nichtlineare Modellierung wird damit das lokale Geschwindigkeitsfeld nicht nur im behandelten Beispiel deutlich realistischer wiedergeben als die konventionelle Modellierung, sondern läßt bei allen Strömungen durch Kanäle nichtkreisförmigem Querschnitts eine signifikante Verbesserung erwarten.

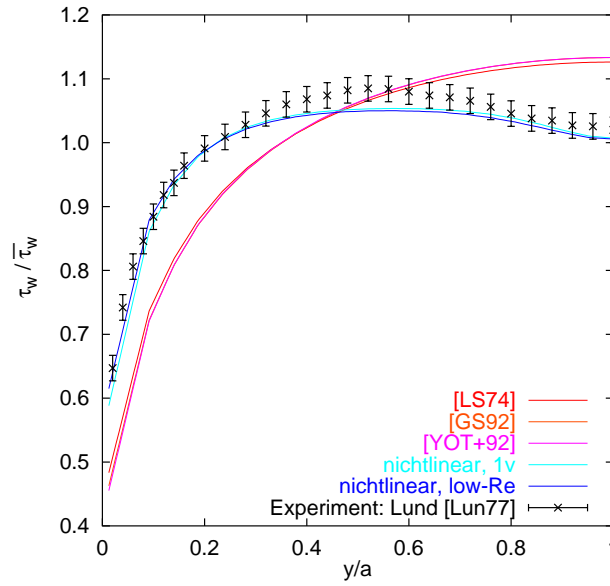


Abbildung 5.20.: Verlauf der Wandschubspannung im eingelaufenen Fall ($z/d_h = 84$)

5.2.4. Modellierung des Wärmeübergangs

Anhand der Tabellen 5.8 bis 5.10 zeigt sich, daß die Nußelt-Zahl – zumindest bei konstanter Prandtl-Zahl – sehr eng mit dem Reibungsbeiwert korreliert ist (Reynoldssche Analogie).

In diesem Abschnitt wird dokumentiert, welchen Einfluß die Modellierung der Geschwindigkeits-Temperatur-Korrelation und damit die Modellierung des turbulenten Wärmestroms auf das berechnete Temperaturfeld hat. Dazu werden neben der linearen Prandtlschen Formulierung nach Gleichung (A.8) auch die nichtlineare RNG- bzw. DIA-Formulierung nach Gleichung (3.4) sowie der nichtlineare Ansatz nach Gleichung (3.5) mit unterschiedlichen Koeffizientensätzen (siehe Abschnitt A.4.3) verglichen.

Es wurden ausgehend von den bereits im vorhergehenden Abschnitt bestimmten Lösungen für $Pr_t = 0.9$ die Temperaturfelder unter der Voraussetzung konstanter Stoffwerte neu berechnet. Als Konvergenzkriterium wurde das Fallen der dimensionslosen Maximumnorm der Temperaturdifferenzen auf unter 10^{-8} festgelegt. Dieses scharfe Konvergenzkriterium schließt numerische Fehler durch unvollständige Konvergenz aus. Typischerweise waren zum Erreichen des Konvergenzkriteriums drei bis vier Iterationen notwendig, wobei das Residuum der algebraischen Gleichungen je Iteration um mindestens drei Größenordnungen reduziert wurde. Bis zu sieben Iterationen waren bei Verwendung des nichtlinearen Modells nach Gleichung (3.4) notwendig, da bei Verwendung des RNG-Koeffizientensatzes nach Tabelle A.7 die Nichtlinearität in vier Schritten eingeführt wurde.

Tabelle 5.13 enthält neben den für den mit Hilfe des Prandtlschen Ansatzes berechneten Nußelt-Zahlen auch die Nußelt-Zahlen aus der Korrelation (2.17), so daß der Einfluß der turbulenten Prandtl-Zahl bereinigt von den unterschiedlichen Druckverlustbeiwerten betrachtet werden kann.

Wandmodell	$Pr_{t,wand}$	$Pr_{t,kern}$	$Nu_{berechnet}$	$Nu_{Korrelation}$
Eingeschwindigkeitsmodell	0.920	0.920	315	333
low-Re- k - ε -Modell	0.920	0.920	354	374
Eingeschwindigkeitsmodell	0.900	0.900	319	333
low-Re- k - ε -Modell	0.900	0.900	358	374
Eingeschwindigkeitsmodell	0.870	0.870	327	333
low-Re- k - ε -Modell	0.870	0.870	366	374
Eingeschwindigkeitsmodell	0.718	0.718	370	333
low-Re- k - ε -Modell	0.718	0.718	409	374
Eingeschwindigkeitsmodell	0.900	0.718	347	333
low-Re- k - ε -Modell	0.900	0.718	375	374
Eingeschwindigkeitsmodell	0.718	0.900	339	333
low-Re- k - ε -Modell	0.718	0.900	390	374

Tabelle 5.13.: Einfluß der turbulenten Prandtl-Zahl auf die berechnete Nußelt-Zahl

Wandmodell	Modell	$Nu_{berechnet}$	$Nu_{Korrelation}$
Eingeschwindigkeitsmodell	RNG	358	333
low-Re- k - ε -Modell	RNG	398	374
Eingeschwindigkeitsmodell	DIA	351	333
low-Re- k - ε -Modell	DIA	391	374
Eingeschwindigkeitsmodell	Launder, $c_T = 0.15$	291	333
low-Re- k - ε -Modell	Launder, $c_T = 0.15$	325	374
Eingeschwindigkeitsmodell	Launder, $c_T = 0.30$	376	333
low-Re- k - ε -Modell	Launder, $c_T = 0.30$	420	374

Tabelle 5.14.: Einfluß nichtlinearer Modellierungen des turbulenten Wärmestroms auf die berechnete Nußelt-Zahl

Es ist festzustellen, daß mit dem Wert von 0.87 für die turbulente Prandtl-Zahl die Ergebnisse der Korrelation am besten wiedergegeben werden. Durch die Streuung der Nußelt-Zahlen und des im Vergleich dazu geringen Einflusses der Änderung der turbulenten Prandtl-Zahl um 0.03, stellt dieses Ergebnis allerdings eher eine Tendaussage dar. Fest steht dagegen, daß der in [RB91] angegebene Wert 0.718 keine Übereinstimmung mit den Nußelt-Zahlen der Korrelation (2.17) ergibt.

Eine Verwendung unterschiedlicher Prandtl-Zahlen für den wandnahen Bereich und den Kernbereich ist möglich, da sichergestellt ist, daß Temperatur und Wärmestrom stetig sind. In die Nußelt-Zahlen geht der Wert der turbulenten Prandtl-Zahl des Kernbereichs etwas stärker ein als der des wandnahen Bereichs.

Die in Tabelle 5.14 aufgeführten Ergebnisse zeigen, daß im Gegensatz zur nichtlinearen Modellierung des Reynoldsschen Spannungstensors ein nichtlinearer Ansatz für den turbulenten Wärmestrom keine Verbesserung des Simulationsergebnisses bewirkt.

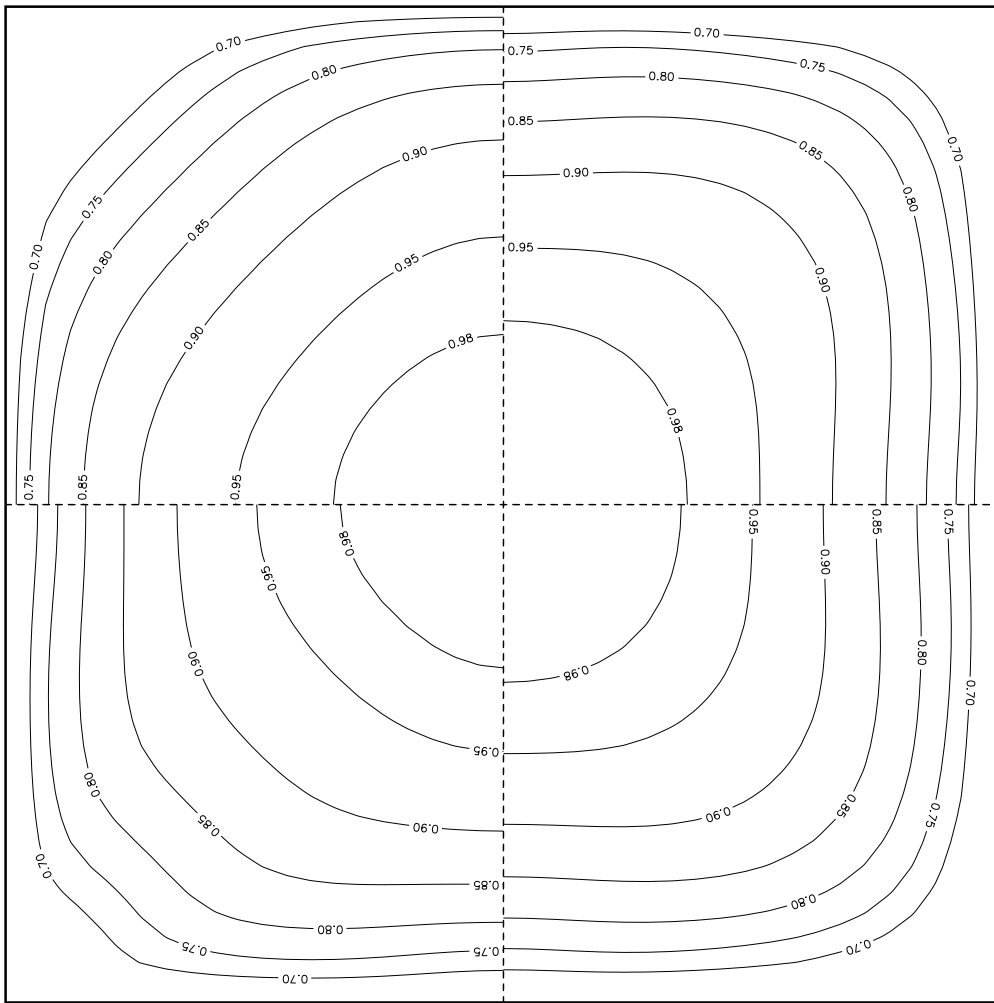


Abbildung 5.21.: Isolinen der dimensionslosen Temperatur $(\overline{T}_w - T)/(\overline{T}_w - T_{\text{zentrum}})$ bei $z/d_h = 84$; links oben: lineares Reynoldsspannungsmodell mit $\text{Pr}_t = 0.9$, rechts oben: nichtlineares Reynoldsspannungsmodell mit $\text{Pr}_t = 0.9$ und Eingeschwindigkeitswandmodell, rechts unten: wie vor, jedoch mit low-Re- k - ε -Wandmodell, links unten: wie vor, jedoch mit RNG-Modell des turbulenten Wärmestroms

Anhand der grafischen Gegenüberstellung der Isolinen der dimensionslosen Temperatur in Abbildung 5.21 wird deutlich, daß die Wiedergabe des korrekten Geschwindigkeitsfelds wesentlichen Einfluß auf das Temperaturfeld hat. Zusammen mit den in Abbildung 5.22 dargestellten Verläufen der dimensionslosen Wandtemperatur für unterschiedliche Modelle zeigt sich, daß auch die nichtlinearen Modelle des turbulenten Wärmestroms einen deutlichen Einfluß auf das Geschwindigkeitsfeld ausüben.

Die Verwendung des Prandtlschen Ansatzes zusammen mit einer konstanten turbulenten Prandtl-Zahl von $\text{Pr}_t = 0.87$ oder $\text{Pr}_t = 0.90$ stellt insgesamt nach den Ergebnissen für den quadratischen Kanal die beste Modellierung des turbulenten Wärmestroms dar.

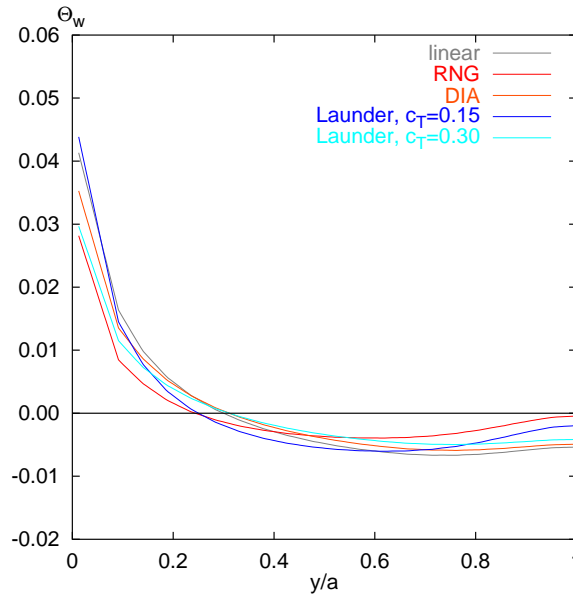


Abbildung 5.22.: Verlauf der dimensionslosen Wandtemperatur $\Theta_w = (T - \overline{T_w})/\overline{T_w}$ bei $z/d_h = 84$ für die lineare ($Pr_t = 0.9$) und verschiedene nichtlineare Modellierungen des turbulenten Wärmestroms

5.3. Turbulente Strömung durch Stabbündel

In diesem Abschnitt werden abschließend die Modelle, die sich als am besten geeignet für die Berechnung des quadratischen Kanals erwiesen haben, auf turbulente Strömungen durch Stabbündel angewendet.

Dazu werden zuerst die Netzabhängigkeit sowie die Ergebnisse und deren Übereinstimmung mit aus Messungen gewonnenen Korrelationen bestimmt und dann die Modelle auf das in Abschnitt 2.2.2 beschriebene 4×4 -Bündel angewendet und die Ergebnisse mit dem gemessenen Wandschubspannungsverlauf verglichen, um die Genauigkeit der Vorhersage des lokalen Wärmeübergangs beurteilen zu können.

5.3.1. Unendliche Stabbündel

Das berechnete unendliche Stabbündel mit quadratischem Gitter weist die Geometrie des zentralen Unterkanals des in Abschnitt 2.2.2 beschriebenen 4×4 -Bündels auf. Hydraulischer Durchmesser und Reynolds-Zahl ergeben sich damit zu

$$d_h = 0.153 \text{ m} \quad \text{und} \quad Re = 1.98 \cdot 10^5.$$

Der Reibungsbeiwert für die entwickelte turbulente Strömung durch quadratische Stabbündel liegt nach [Reh87] für $P/d = 1.33$ etwa 7% über der von Kreisrohren gleichen hydraulischen Durchmessers. Mit dem oben angegebenen Wert der Reynolds-Zahl und der in [VDI84, Kapitel Gb] angegebenen Korrelation von Filonenko (2.14) folgt

$$\lambda_{f,\infty} = 1.07 \cdot \lambda_{f,\text{Filonenko}} = 0.0167.$$

Die in [Reh87, (7.28) bis (7.30)] wiedergegebene Korrelation von Presser liefert mit

$$\lambda_{f,\text{Presser}} = 0.0170$$

einen vergleichbaren Reibungsbeiwert für die eingelaufene turbulente Strömung im unendlichen Stabbündel.

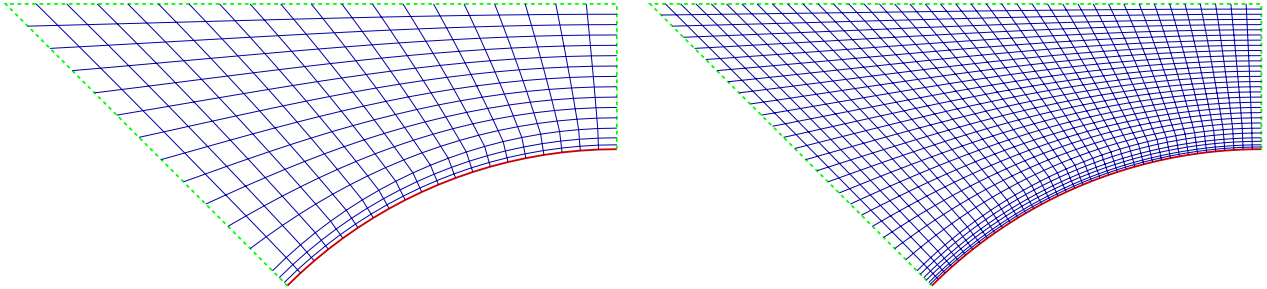


Abbildung 5.23.: Gröberes und verfeinertes Netz zur Berechnung der turbulenten Strömung durch ein unendliches Stabbündel mit quadratischer Stabanordnung

Zur Untersuchung des Einflusses der Netzfeinheit wurden die in Abbildung 5.23 dargestellten Netze für den Querschnitt verwendet. Bei dem feineren Netz sind alle Elemente des gröbereren Netzes in vier Elemente unterteilt worden, so daß die Netzweite genau halb so groß ist und damit eine Abschätzung des Fehlers möglich wird.

Turbulenzmodell	Wandmodell	Netz	$\lambda_{f,\text{eingelaufen}}$	$v_{z,\text{max}}/v_b$
[GS92]	Eingeschwindigkeitsmodell	standard	0.01551	1.1721
[GS92]	Eingeschwindigkeitsmodell	fein	0.01547	1.1727
[YOT+92]	Eingeschwindigkeitsmodell	standard	0.01543	1.1714
[YOT+92]	Eingeschwindigkeitsmodell	fein	0.01548	1.1707
[LS74]	Eingeschwindigkeitsmodell	standard	0.01616	1.1562
[LS74]	Eingeschwindigkeitsmodell	fein	0.01612	1.1568
[Gir95]-[Tau92]-HGC	Eingeschwindigkeitsmodell	standard	0.01542	1.1387
[Gir95]-[Tau92]-HGC	Eingeschwindigkeitsmodell	fein	0.01547	1.1359
[Gir95]-[Tau92]-HGC	low-Re- k - ε -Modell	standard	0.01658	1.1456
[Gir95]-[Tau92]-HGC	low-Re- k - ε -Modell	fein	0.01657	1.1458

Tabelle 5.15.: Ergebnisse für die Berechnung der eingelaufenen Strömung durch ein unendliches Stabbündel für unterschiedlich feine Netze und verschiedene Modelle der Reynoldsschen Spannungen sowie des wandnahen Bereichs

Die Ergebnisse der Simulationen in Bezug auf den Reibungsbeiwert und die maximale Strömungsgeschwindigkeit in Tabelle 5.15 zeigen, daß der Fehler, der durch die Verwendung des gröbereren Netzes entsteht, bereits in der Größenordnung des Abbruchkriteriums von 10^{-4} liegt. Das gröbere Netz ist somit zur Beurteilung der Modelle ausreichend, da die Ergebnisse nicht mehr signifikant von der verwendeten Numerik, sondern allein vom angewendeten Modell abhängen.

Wie bei der turbulenten Strömung im quadratischen Kanal führen die linearen und nicht-linearen Modellierungen der Reynoldsschen Spannungen zu qualitativ unterschiedlichen Ergebnissen. Die Abbildung 5.24 zeigt neben der Deformation des Geschwindigkeitsfeldes auch die berechneten Sekundärströmungsvektoren. Auch die in Abbildung 5.25 dargestellten Verläufe der Wandschubspannung sowie der axialen Geschwindigkeit geben deutlich den Einfluß der nichtlinearen Modellierung der Reynoldsschen Spannungen wieder. Übereinstimmend mit den Ergebnissen für den quadratischen Kanal zeigt sich wieder eine sehr enge Übereinstimmung der grundsätzlich verschiedenen Modelle nach [GS92] und nach [YOT⁺92]. Auch für die Berechnung turbulenter Strömungen durch Stabbündel bringt daher der zusätzliche numerische Aufwand für das RNG-Modell keinen erkennbaren Vorteil.

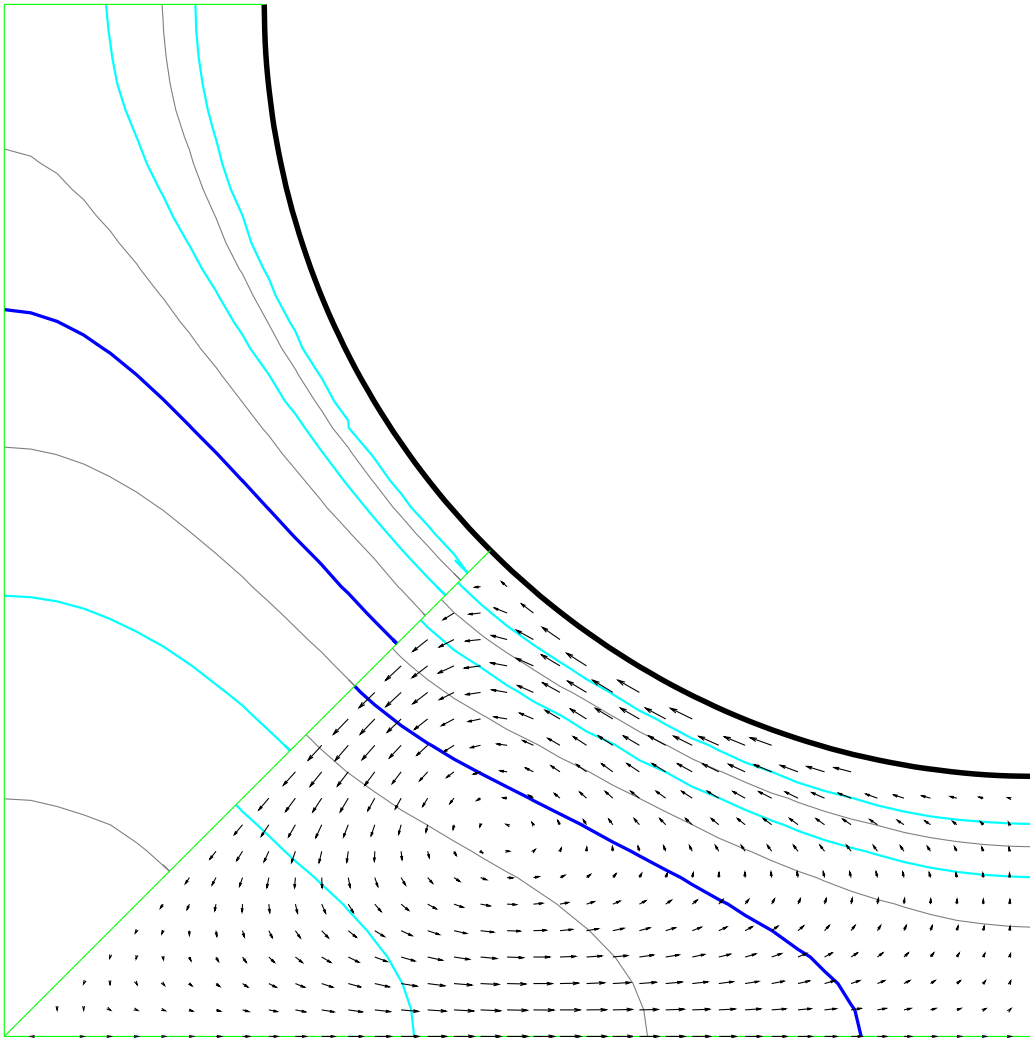


Abbildung 5.24.: Isolines der auf die mittlere Geschwindigkeit normierten axialen Geschwindigkeitskomponenten ($\Delta v_z/v_b = 0.05$, $v_z/v_b = 1.00$ hervorgehoben) sowie Sekundärströmungsvektoren für die entwickelte turbulente Strömung durch ein unendliches Stabbündel; links oben: lineares Turbulenzmodell nach [GS92], rechts unten: nichtlineares Turbulenzmodell mit low-Re- k - ε -Wandmodell

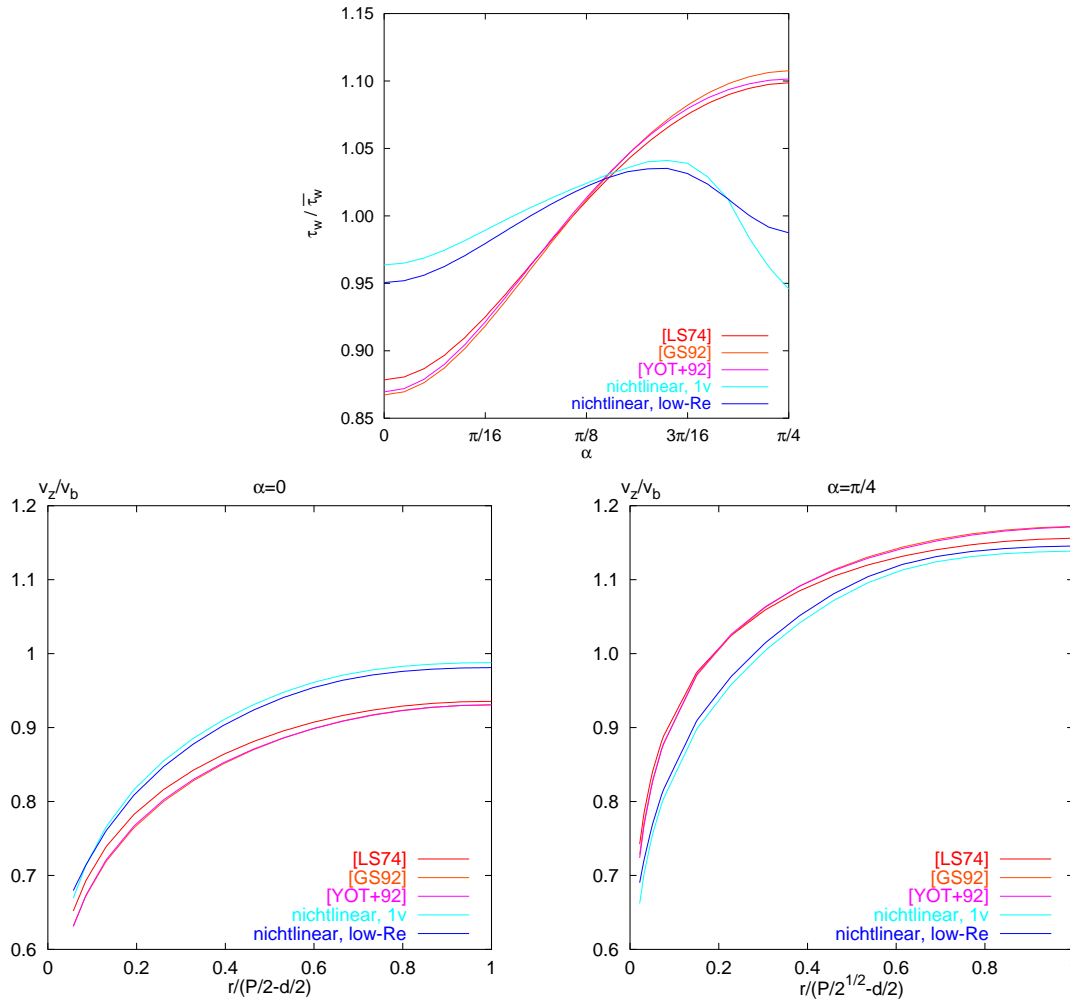


Abbildung 5.25.: Wandschubspannung über dem Winkel α sowie axiale Geschwindigkeitskomponente über dem Wandabstand r in Richtung der Unterkanalmitte sowie des nächsten Stabs für unterschiedliche Turbulenzmodelle

Im Gegensatz zu den linearen Modellen sagt das nichtlineare Modell ein Minimum der Wandschubspannung – und damit bei gleichförmiger Beheizung ein Maximum der Wandtemperatur – zur Unterkanalmitte hin voraus. Dieses Ergebnis wird durch die in Abschnitt 2.2.2 beschriebenen Experimente bestätigt. Die Sekundärströmungen sind im Experiment mit der verwendeten Meßtechnik nur schwer genau zu messen, da ihre Amplitude im Maximum kleiner als 2% der axialen Geschwindigkeitskomponente beträgt.

Sowohl der Verlauf der Wandschubspannung als auch der Reibungsbeiwert werden bei Verwendung des low-Re- k - ε -Wandmodells deutlich genauer beziehungsweise plausibler wiedergegeben. Wahrscheinlich gelten die bei der Verwendung universeller Funktionen getroffenen Gleichgewichtsbedingungen vor allem in dem zur Unterkanalmitte weisenden Bereich der Stäbe ähnlich wie in Ablösepunkten nicht, so daß das low-Re- k - ε -Wandmodell bei der Berechnung von Strömungen durch Stabbündel einen Vorteil in der Vorhersage von Strömungsfeld und Wandschubspannungsverlauf bringt.

5.3.2. Das 4×4 -Stabbündel

Abschließend wird die entwickelte turbulente Strömung durch das in Kapitel 2 beschriebene 4×4 -Stabbündel untersucht.

Turbulenzmodell	Wandmodell	Netz	$\lambda_{f,\text{eingelaufen}}$	$v_{z,\text{max}}/v_b$
[GS92]	Eingeschwindigkeitsmodell	strukturiert	0.01556	1.2920
[GS92]	Eingeschwindigkeitsmodell	unstrukturiert	0.01563	1.2869
[YOT ⁺ 92]	Eingeschwindigkeitsmodell	strukturiert	0.01544	1.2897
[YOT ⁺ 92]	Eingeschwindigkeitsmodell	unstrukturiert	0.01539	1.2887
[LS74]	Eingeschwindigkeitsmodell	strukturiert	0.01619	1.2734
[LS74]	Eingeschwindigkeitsmodell	unstrukturiert	0.01625	1.2686
[Gir95]-[Tau92]-HGC	Eingeschwindigkeitsmodell	strukturiert	0.01545	1.2542
[Gir95]-[Tau92]-HGC	Eingeschwindigkeitsmodell	unstrukturiert	0.01545	1.2549
[Gir95]-[Tau92]-HGC	low-Re- k - ε -Modell	strukturiert	0.01655	1.2550
[Gir95]-[Tau92]-HGC	low-Re- k - ε -Modell	unstrukturiert	0.01653	1.2580

Tabelle 5.16.: Ergebnisse für die Berechnung der Strömung durch ein 4×4 -Stabbündel für unterschiedliche Netze und verschiedene Modelle der Reynoldsschen Spannungen sowie des wandnahen Bereichs

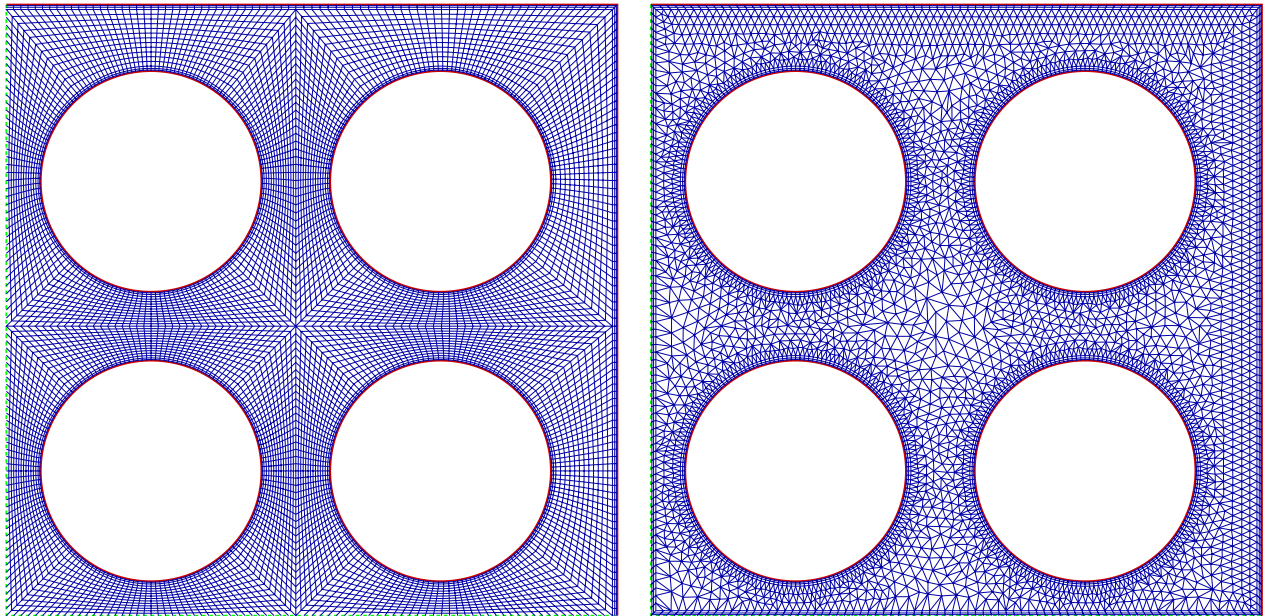


Abbildung 5.26.: Feines strukturiertes und gröberes unstrukturiertes Netz zur Berechnung der turbulenten Strömung durch ein 4×4 -Stabbündel mit quadratischer Stabanordnung

Die in Tabelle 5.16 wiedergegebenen Ergebnisse zeigen eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse aller verwendeten Modelle für die in Abbildung 5.26 wiedergegebenen Netze.

Das strukturierte Netz besitzt je Netzebene 10 560 Knoten und 10 080 Viereckelemente mit Innenwinkeln zwischen 39.6 und 140.4 Grad. Das unstrukturierte Netz setzt sich aus 2 916 Viereckelementen und 5 994 Dreieckelementen mit Innenwinkeln von 15.0 bis 143.2 Grad zusammen.

Da das hybride Netz trotz fast gleicher Anzahl an Elementen mit 6 396 Knoten deutlich weniger Knoten und damit Stützstellen aufweist, reduziert sich die Größe der Matrizen. Die Rechenzeit beträgt damit nur knapp 60% der Rechenzeit für das strukturierte Netz. Die gute Übereinstimmung der mit beiden Netzen erhaltenen Ergebnisse zeigt am Beispiel der Isolinien der Geschwindigkeit für das nichtlineare Modell mit low-Re- k - ε -Wandmodell die Abbildung 5.27.

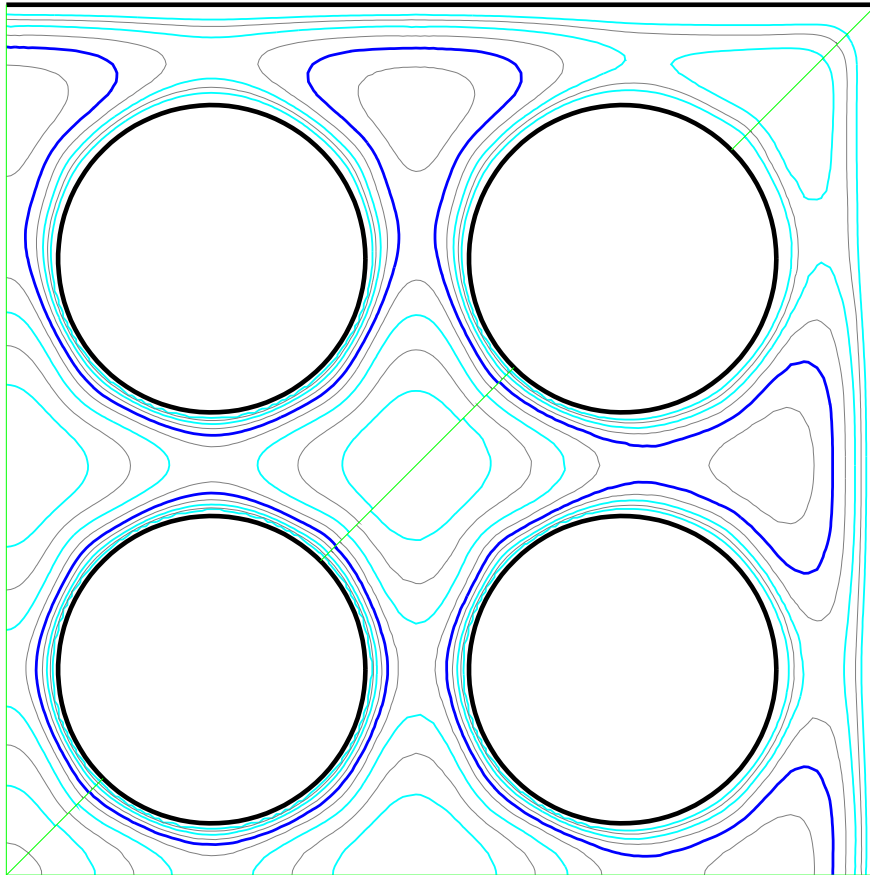


Abbildung 5.27.: Isolinien der auf die mittlere Geschwindigkeit normierten axialen Geschwindigkeitskomponente ($\Delta v_z/v_b = 0.05$, $v_z/v_b = 1.00$ hervorgehoben) für die entwickelte turbulente Strömung durch ein 4×4 -Stabbündel mit nichtlinearem Turbulenzmodell und low-Re- k - ε -Wandmodell; links oben: strukturiertes Netz, rechts unten: gröberes unstrukturiertes Netz

Die Verläufe der berechneten Wandschubspannung sind für den inneren Stab 1 in Abbildung 5.28 den gemessenen und der mit Hilfe des Programms $\mathcal{N}3\mathcal{S}$ berechneten und [Mur95] entnommenen Verläufen gegenübergestellt.

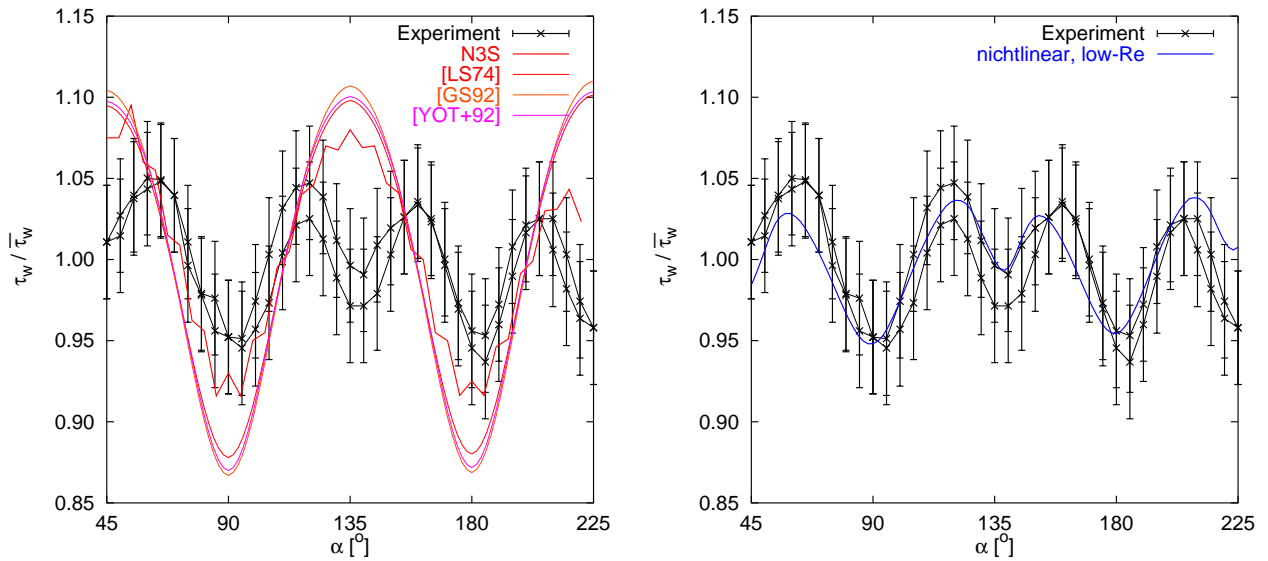


Abbildung 5.28.: Berechneter Wandschubspannungsverlauf für Stab 1 im Vergleich mit dem gemessenen Verlauf

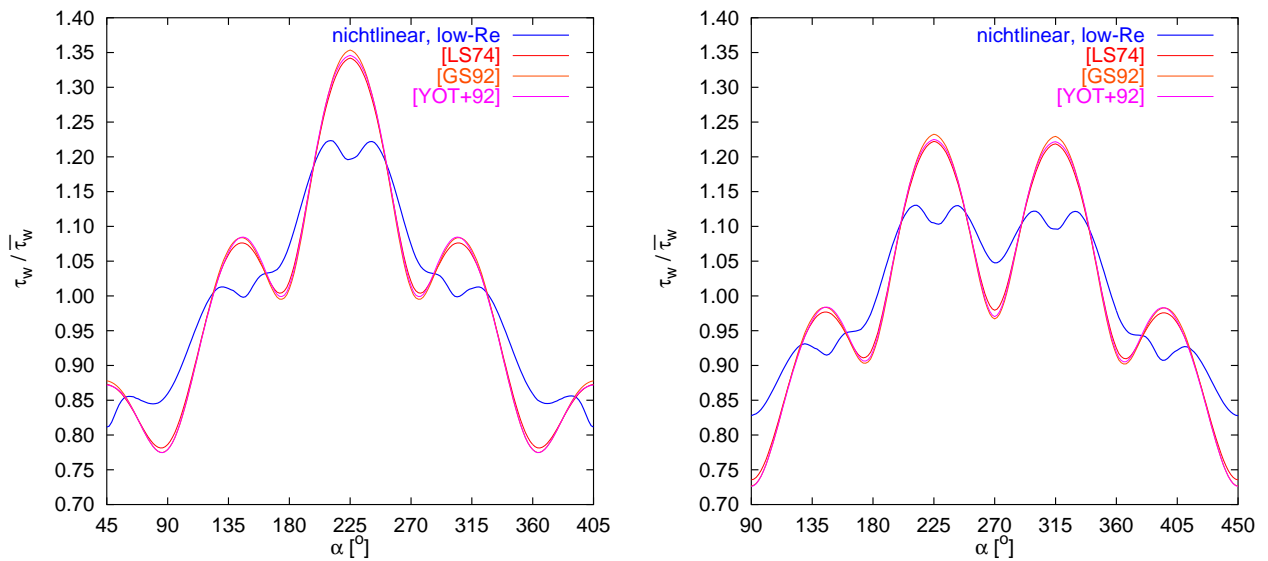


Abbildung 5.29.: Berechneter Wandschubspannungsverlauf für die Stäbe 5 und 6

Es zeigt sich, daß die linearen Modelle neben dem qualitativ falschen Verlauf auch die Variation der Wandschubspannung signifikant überschätzen. Der mit dem Programm *N3S* berechnete Verlauf weist eine kleinere Variation auf als die mit gleichen Modellen im Rahmen dieser Arbeit berechneten Verläufe.

Der glattere Verlauf der hier berechneten Wandschubspannung sowie die erreichte Netzunabhängigkeit weist jedoch auf eine wahrscheinlich durch ein zu grobes Netz bedingte Ungenauigkeit in der Simulation mit *N3S* hin.

Das nichtlineare Turbulenzmodell, das schon beim quadratischen Kanal und dem unendlichen Stabbündel in Verbindung mit dem low-Re- k - ε -Wandmodell die besten Ergebnisse erbrachte, liefert auch für das 4×4 -Stabbündel einen Wandschubspannungsverlauf, der sowohl qualitativ als auch quantitativ den experimentell bestimmten Verlauf trifft.

Als weiteres Beispiel des qualitativen Unterschieds der berechneten Wandschubspannungsverläufe und damit des lokalen Wärmeübergangs sind in Abbildung 5.29 die Wandschubspannungsverläufe der Stäbe 5 und 6 des 4×4 -Stabbündels wiedergegeben. Wieder zeigt sich der sowohl qualitative als auch quantitative Unterschied deutlich. Das nichtlineare Modell sagt wie das Experiment bei Stab 1 in Richtung der Unter- oder Wandkanalzentren im Gegensatz zu den linearen Modellen immer ein Wandschubspannungsminimum voraus.

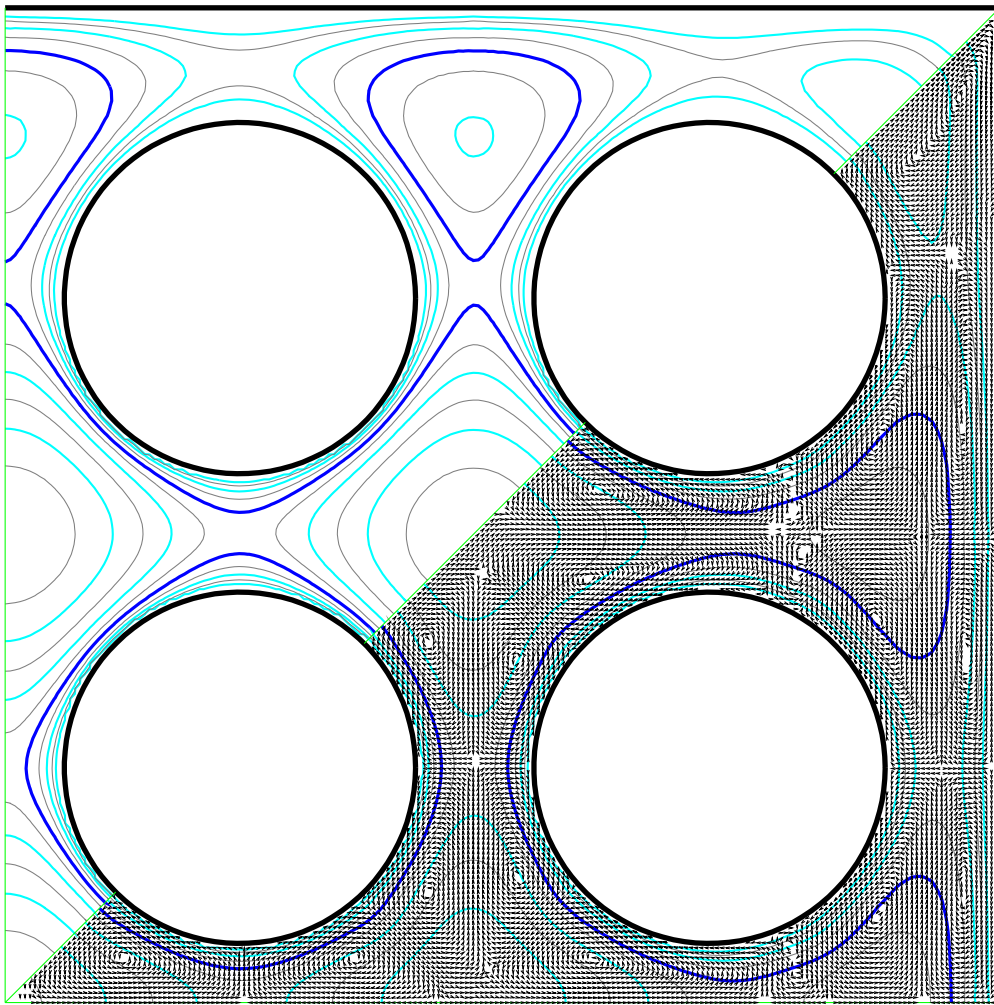


Abbildung 5.30.: Isolinien der auf die mittlere Geschwindigkeit normierten axialen Geschwindigkeitskomponente ($\Delta v_z/v_b = 0.05$, $v_z/v_b = 1.00$ hervorgehoben) sowie Sekundärströmungsvektoren für die entwickelte turbulente Strömung durch ein 4×4 -Stabbündel; links oben: lineares Turbulenzmodell nach [GS92], rechts unten: nichtlineares Turbulenzmodell mit low-Re- k - ε -Wandmodell

Der deutliche Unterschied im berechneten Geschwindigkeitsfeld und die vom nichtlinearen Turbulenzmodell im Gegensatz zu allen linearen Modellen vorhergesagten Sekundärströmungen der entwickelten Strömung sind in Abbildung 5.30 wiedergegeben. Der Bereich zwischen den vier Stäben weist bezüglich des Geschwindigkeitsfelds eine große Ähnlichkeit mit dem Geschwindigkeitsfeld der entwickelten Strömung im quadratischen Kanal auf. Der ausführliche Vergleich unterschiedlicher Modelle für die turbulente Strömung durch den quadratischen Kanal läßt sich daher – wie das Ergebnis des nichtlinearen Modells zeigt – gut auf den Fall von turbulenten Strömungen durch Stabbündelwärmetauscher übertragen.

Das nichtlineare Modell der Reynoldsschen Spannungen in der Kombination nach [Gir95]-[Tau92]-HGC ist in Verbindung mit dem low-Re- k - ε -Wandmodell damit geeignet zur zuverlässigen Vorhersage des Wandschubspannungsverlaufs und damit des lokalen Wärmeübergangs in längsangeströmten Stabbündeln.

6. Zusammenfassung und Ausblick

Aus den Simulationen für die turbulente Strömung durch Kanäle nichtkreisförmigem Querschnitts mit unterschiedlichen Modellen kann eine klare Empfehlung für ein Modell abgegeben werden, das sowohl die Wandschubspannungsverteilung und damit den lokalen Wärmeübergang als auch Nußelt-Zahl und Druckverlustkoeffizienten ausgezeichnet vorherzusagen gestattet. Das nichtlineare algebraische Modell der Reynoldsschen Spannungen in expliziter Form nach [Gir95] auf Basis des Reynoldsspannungsmodells nach [Tau92]-HGC und den weiteren Modellkoeffizienten nach [GS92] liefert die beste Modellierung der turbulenten Kernströmung. In Kombination mit einem low-Re- k - ϵ -Modell in Wandnähe ergeben sich für längsangeströmte Stabbündel die besten Resultate bei gleichzeitiger Anwendbarkeit auf stark beheizte Strömungen mit signifikanten Stoffwertvariationen.

Voraussetzung zur Bewertung der Modelle war eine leistungsfähige Numerik. Dazu wurde im Rahmen dieser Arbeit ein mit etwa 3 MB und 100 000 Zeilen Quellcode sehr umfangreiches Programmsystem auf Basis der Methode der finiten Elemente entwickelt. Dabei wurde auch die Eigenschaft der Parabolisierbarkeit einiger Erhaltungsgleichungen für die betrachteten Strömungsformen genutzt und ein neues Verfahren zur lokalen partiellen Parabolisierung entwickelt.

Das numerische Verfahren wurde anhand unterschiedlicher Strömungsfälle validiert. Sowohl das Verfahren zur Berechnung der turbulenten Kernströmung als auch das daran gekoppelte Verfahren zur Berechnung des wandnahen Bereichs sind von zweiter Ordnung. Am Beispiel laminarer Strömungsfälle konnte nachgewiesen werden, daß bei schneller Konvergenz die exakte Lösung für Geschwindigkeits-, Druck- und Temperaturfeld durch Netzverfeinerung mit einer Genauigkeit reproduziert werden kann, die nur durch die begrenzte Genauigkeit der Zahlenrepräsentation im Rechner limitiert ist.

Neben effizienten iterativen Gleichungslösern mit geeigneten Vorkonditionierungsverfahren tragen im Rahmen der Arbeit entwickelte konsistenzerhaltende Diskretisierungsverfahren zur effizienten und stabilen Lösung der Modelle in Form partieller Differentialgleichungssysteme bei.

Das neue Verfahren zur Behandlung des wandnahen Bereichs mit universellen Funktionen oder low-Re-Modellen führt dazu, daß bei der Berechnung turbulenter Strömungen das Netz des Kernbereichs auch am Rand modifiziert werden kann, ohne Restriktionen durch eine damit verbundene Beeinflussung der Berechnung des wandnahen Bereichs in Kauf nehmen zu müssen. Solche Restriktionen sind typisch für alle heute üblichen Verfahren zur Lösung von Modellen für große Reynolds-Zahlen, bei denen durch die Größe der wandnächsten Zel-

len die resultierenden y^+ -Werte und damit die Gültigkeit der getroffenen Modellannahmen beeinflußt werden.

Zur Berücksichtigung der in stark beheizten Strömungen durch längsangeströmte Stabbündelwärmetauschern auftretenden Stoffwertvariationen wurden effiziente Verfahren der Stoffwertrepräsentation entwickelt. Da die Modellierung des wandnahen Bereichs mit Hilfe universeller Wandfunktionen ihre Gültigkeit bei stark beheizten und auch bei schwach beheizten Strömungen verliert, wurde der wandnahe Bereich mit Hilfe eines low-Re- k - ε -Modells behandelt. Zur Steigerung der Effizienz und Genauigkeit des Verfahrens wurde eine gekoppelte eindimensionale Simulation des wandnahen Bereichs mit adaptiver Netzanpassung und Erweiterung der Modellierung auf den technisch interessanten Fall rauher Wände wiederum auf Basis der finiten Elemente entwickelt und erfolgreich validiert.

Bezüglich der Modellierung der Reynoldsschen Spannungen im vollturbulenten Bereich konnte bestätigt werden, daß alle linearen Modelle nicht in der Lage sind, den Wandschubspannungsverlauf und das Strömungsfeld qualitativ korrekt wiederzugeben. Lediglich globale Größen wie Druckverlustkoeffizient und Nußelt-Zahl werden korrekt vorhergesagt. Eine signifikante Verbesserung mit der die experimentellen Resultate im Rahmen der Meßgenauigkeit wiedergegeben werden, liefert die oben erwähnte nichtlineare Modellierung der Reynoldsschen Spannungen. Die bis auf einen Koeffizienten der Transportgleichung identische Modellkombination erwies sich auch nach Untersuchung unterschiedlicher Strömungsfälle mit Ablösungen in [Bä00] zur Modellierung isothermer vollturbulenter Strömungen als am geeignetsten. Die erweiterte Modellauswahl und die Konvergenz auch der nichtlinearen Modelle mit konstanten Koeffizienten führte nicht zu noch besser geeigneten Modellen. Die in [Bä00] geäußerte Vermutung einer Verbesserung der Vorhersagegenauigkeit durch Modifikationen der Transportgleichungen der Turbulenzgrößen kann zumindest für Stabbündel nicht bestätigt werden – die Modelle erbrachten im Gegenteil sogar zum Teil eine Reduzierung der Vorhersagegenauigkeit und der Stabilität des Verfahrens bei erhöhtem numerischen Aufwand.

Ausblick

Durch die umfassende Modellbewertung und die Entwicklung eines zur Simulation von stark beheizten Stabbündelwärmetauschern geeigneten numerischen Verfahrens wurde die Voraussetzung geschaffen, weitergehende Untersuchungen technisch interessanter und sicherheitstechnisch relevanter Stabbündelkonfigurationen durchzuführen. Einige mögliche Anwendungsfälle wurden bereits in der Einleitung erwähnt.

Dadurch, daß die Geschwindigkeit und Rauigkeit der die Strömung begrenzenden Wände lokal vorgebar ist, wurde bewußt auch eine Erweiterung auf einfache Modelle zur Vorhersage von Filmströmungen offengehalten.

Die Verfügbarkeit des dokumentierten und modular aufgebauten Quellcodes ermöglicht darüber hinaus auch die Untersuchung der Effizienz und Genauigkeit weiterer Modifikationen der Gleichungsdiskretisierung und die Bewertung neuer Turbulenzmodelle mit nur geringem Programmieraufwand.

Literaturverzeichnis

- [AD88] S. Abdallah und J. Dreyer. Dirichlet and Neumann Boundary Conditions for the Pressure Poisson Equation of Incompressible Flow. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 8:1029–1036, 1988.
- [AF89] S.W. Armfield und C.A.J. Fletcher. Comparison of k - ϵ and Algebraic Reynolds Stress Models for swirling diffuser flow. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 9:987–1009, 1989.
- [And95] J.D. Anderson, Jr. *Computational Fluid Dynamics*. McGraw-Hill, 1995.
- [Bä00] V. Bäumer. *Ein Vergleich expliziter algebraischer Turbulenzmodelle*. Shaker Verlag, 2000. ISBN 3-8265-6979-2, Zugl.: Dissertation, TU Braunschweig.
- [Bak82] A.J. Baker. On Current Aspects of Finite Element Computational Fluid Mechanics for Turbulent Flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 32:261–282, 1982.
- [Bak83] A.J. Baker. *Finite Element Computational Fluid Mechanics*. Hemisphere, 1983.
- [BBC⁺94] R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine und H. Van der Vorst. *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods, 2nd Edition*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [Ben88a] A.C. Benim. *Finite Elemente zur Berechnung turbulenter Diffusionsflammen*. VDI-Verlag, 1988. Zugl.: Dissertation, Universität Stuttgart.
- [Ben88b] C. Benocci. Introduction to the Modeling of Turbulence. Course Note 136/EA, von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 1988.
- [BO83] A.J. Baker und J.A. Orzechowski. An Interaction Algorithm for Three-Dimensional Turbulent Subsonic Aerodynamic Junction Region Flow. *AIAA J.*, 21(4):524–533, 1983.
- [Bra78] P. Bradshaw. Introduction. In P. Bradshaw, Hrsg., *Turbulence*. Springer, 1978.
- [BS79] I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew. *Ergänzende Kapitel zum Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch, 19. Auflage, 1979.

- [BS87] M.S. Bhatti und R.K. Shah. Turbulent and Transition Flow Convective Heat Transfer in Ducts. In S. Kakaç, R.K. Shah und W. Aung, Hrsg., *Handbook of Single-Phase Heat Transfer*. Wiley, 1987.
- [CB88] T. Cebeci und P. Bradshaw. *Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer*. Springer, 1988.
- [CH68] R. Courant und D. Hilbert. *Methoden der mathematischen Physik II*. Springer, 1968.
- [Chu82] T.J. Chung. *Finite Elemente in der Strömungsmechanik*. Hanser, 1982.
- [CK89] R. Cohen und P.K. Khosla. Three-Dimensional reduced Navier-Stokes Solutions for subsonic separated and non-separated flows, using a global pressure relaxation procedure. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 9:1087–1098, 1989.
- [DR84] A.O. Demuren und W. Rodi. Calculation of turbulence-driven secondary motion in non-circular ducts. *J. Fluid Mech.*, 140:189–222, 1984.
- [DW94] A.O. Demuren und R.V. Wilson. Estimating Uncertainty in Computation of Two-Dimensional Separated Flows. *Trans. ASME J. Fluids Eng.*, 116:216–220, 1994.
- [Fer87] J.H. Ferziger. Simulation of Incompressible Turbulent Flows. *J. Comput. Phys.*, 69:1–48, 1987.
- [Fer88] J.H. Ferziger. A note on numerical accuracy. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 8:995–996, 1988.
- [Fle84] C.A.J. Fletcher. *Computational Galerkin Methods*. Springer, 1984.
- [Fle91a] C.A.J. Fletcher. *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Bd. 1. Springer, 1991.
- [Fle91b] C.A.J. Fletcher. *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Bd. 2. Springer, 1991.
- [FP96] J.H. Ferziger und M. Perić. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 1996.
- [GE81] F.B. Gessner und A.F. Emery. The Numerical Prediction of Developing Turbulent Flow in Rectangular Ducts. *J. Fluids Eng.*, 103:445–455, 1981.
- [GGRK81] U. Ghia, K.N. Ghia, S.G. Rubin und P.K. Khosla. Study of Incompressible Flow Separation using Primitive Variables. *Comput. Fluids*, 9:123–142, 1981.
- [Gir95] S.S. Girimaji. Fully-Explicit and Self-Consistent Algebraic Reynolds Stress Model. Technischer Bericht 95-82, Institute for Computer Applications in Science and Engineering, 1995.

-
- [Gir96] S. Girimaji. Improved algebraic Reynolds stress model for engineering flows. In W. Rodi und G. Bergeles, Hrsg., *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 3*, Seiten 121–129, 1996.
- [GPE79] F.B. Gessner, J.K. Po und A.F. Emery. Measurements of Developing Turbulent Flow in a Square Duct. In F. Durst, B.E. Launder, F.W. Schmidt und I.H. Whitelaw, Hrsg., *Turbulent Shear Flows I*. Springer, 1979.
- [Gra58] H. Grad. Principles of the Kinetic Theory of Gases. In S. Flügge, Hrsg., *Handbuch der Physik, Bd. XII Thermodynamik der Gase*. Springer, 1958.
- [GS87] P.M. Gresho und R.L. Sani. On Pressure Boundary Conditions for the incompressible Navier-Stokes Equations. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 7:1111–1145, 1987.
- [GS92] T.P. Gatski und C.G. Speziale. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows. Technischer Bericht 92-58, Institute for Computer Applications in Science and Engineering, 1992.
- [Hac91] W. Hackbusch. *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme*. B.G. Teubner, 1991.
- [Hil95] V. Hillerscheid. Behandlung des wandnahen Bereichs beheizter turbulenter Strömungen. Studienarbeit, Institut für Raumflug- und Reaktortechnik, TU Braunschweig, 1995.
- [Hin75] J.O. Hinze. *Turbulence*. McGraw-Hill, 1975.
- [Hir88] C. Hirsch. *Numerical computation of internal & external flows. Volume 1: Fundamentals and numerical discretization*. Wiley, 1988.
- [HL72] K. Hanjalić und B.E. Launder. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. *J. Fluid Mech.*, 52:609–638, 1972.
- [HL76] K. Hanjalić und B.E. Launder. Contribution towards a Reynolds-stress Closure for Low-Reynolds-Number Turbulence. *J. Fluid Mech.*, 74:593–610, 1976.
- [HSH87] A.G. Hutton, R.M. Smith und S. Hickmott. The computation of turbulent flows of industrial complexity by the finite element method – progress and prospects. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 7:1277–1298, 1987.
- [HWN⁺94] M. Hallmann, S. Wittig, B. Noll, E. Benz und R. Hestermann. Erfahrungen mit einem Finite Element Verfahren bei der numerischen Simulation inkompressibler turbulenter Strömungen in Gasturbinenkomponenten. *Z. Flugwiss. Weltraumforsch.*, 18:133–139, 1994.
- [Jay69] C.L.V. Jayatilke. The Influence of Prandtl Number and Surface Roughness on the Resistance of the Laminar Sub-Layer to Momentum and Heat Transfer. In U. Grigull und E. Hahne, Hrsg., *Progress in Heat and Mass Transfer*, Seiten 193–327. Pergamon Press, 1969.

- [JD92] M. Jaeger und G. Dhatt. An extended k - ϵ Finite Element model. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 14:1325–1345, 1992.
- [Jis82] M. Jisha. *Konvektiver Impuls-, Wärme- und Stoffaustausch*. Vieweg, 1982.
- [KR63] J. Kestin und P.D. Richardson. Heat Transfer across Turbulent, Incompressible Boundary Layers. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 6, 1963.
- [KTN91] N. Kondo, N. Tosaka und T. Nishimura. Third-order upwind finite element formulations for incompressible viscous flow problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 93:169–187, 1991.
- [KWU95] FOCUS and HTP, Fuel Assemblies for Pressurized Water Reactors. SIEMENS AG, Bereich Energieerzeugung (KWU), Erlangen, 1995.
- [Lau89] B.E. Launder. Second-moment closure and its use in modelling turbulent industrial flows. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 9:963–985, 1989.
- [LB81] C.K.G. Lam und K. Bremhorst. A Modified Form of the $k - \epsilon$ Model for Predicting Wall Turbulence. *Trans. ASME J. Fluids Eng.*, 103:456–460, 1981.
- [LL86] L.D. Landau und E.M. Lifschitz. *Lehrbuch der Theoretischen Physik VI, Hydrodynamik*. Akademie Verlag, 1986.
- [LP85] B.R. Latimer und A. Pollard. Comparison of pressure-velocity coupling solution algorithms. *Numer. Heat Transfer*, 8:635–657, 1985.
- [LS72] B.E. Launder und D.B. Spalding. *Mathematical Models of Turbulence*. Academic Press, 1972.
- [LS74] B.E. Launder und D.B. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 3:269–289, 1974.
- [Lun77] E.G. Lund. Mean Flow and Turbulence Characteristics in the Near Corner Region of a Square Duct. Diplomarbeit, Department of Mechanical Engineering, University of Washington, 1977.
- [Mar83] J.G. Marvin. Turbulence Modelling for Computational Aerodynamics. *AIAA J.*, 21:941–955, 1983.
- [Mar86] N.C. Markatos. The mathematical modelling of turbulent flows. *Appl. Math. Modelling*, 10:190–220, 1986.
- [Mey94] L. Meyer. Measurements of turbulent velocity and temperature in axial flow through a heated rod bundle. *Nucl. Eng. Des.*, 146:71–82, 1994.
- [MH85] D.L. Marcum und J.D. Hoffman. Calculation of Three-dimensional Flowfields by the Unsteady Method of Characteristics. *AIAA J.*, 23(10):1497–1505, 1985.

-
- [MK90] H.K. Myong und N. Kasagi. A New Approach to the Improvement of k - ϵ Turbulence Model for Wall-Bounded Shear Flows. *JSME Int. J.*, 33(1):63–72, 1990.
 - [MK91] H.K. Myong und T. Kobayashi. Prediction of Three-Dimensional Developing Turbulent Flow in a Square Duct With an Anisotropic Low-Reynolds-Number k - ϵ Model. *Transactions of the ASME*, 113:608–615, 1991.
 - [MKM89] N.N. Mansour, J. Kim und P. Moin. Near-Wall k - ϵ Turbulence Modeling. *AIAA J.*, 27(8):1068–1073, 1989.
 - [MP89] R. Martinuzzi und A. Pollard. Comparative Study of Turbulence Models in Predicting Turbulent Pipe Flow, Part I: Algebraic Stress and k - ϵ Models. *AIAA J.*, 27(1):29–36, 1989.
 - [MSHL91] E.W. Miner, T.F. Swear, Jr., R.A. Handler und R.I. Leighton. Examination of wall damping for the k - ϵ turbulence model using direct simulations of turbulence channel flow. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 12:609–624, 1991.
 - [Mur95] J. Mur. Prediction of Axial Flows in Rod Bundles with the k - ϵ Model. Technischer Bericht HT-33/95/012/A, Electricité de France, 1995.
 - [Nal87] M. Nallasamy. Turbulence models and their applications to the prediction of internal flows: A review. *Comput. Fluids*, 15(2):151–194, 1987.
 - [NT90] Y. Nagana und M. Tagawa. An Improved k - ϵ Model for Boundary Layer Flows. *Trans. ASME J. Fluids Eng.*, 112:33–39, 1990.
 - [PFC89] D. Pelletier, A. Fortin und R. Camarero. Are FEM Simulations of incompressible flows really incompressible? (Or how simple flows can cause headaches!). *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 9:99–112, 1989.
 - [PM89] A. Pollard und R. Martinuzzi. Comparative Study of Turbulence Models in Predicting Turbulent Pipe Flow, Part II: Reynolds Stress and k - ϵ Models. *AIAA J.*, 27(12):1714–1721, 1989.
 - [PME92] T.C. Papanastasiou, N. Malamataris und K. Ellwood. A new outflow boundary condition. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 14:587–608, 1992.
 - [Po75] J.K. Po. Developing Turbulent Flow in the Entrance Region of a Square Duct. Diplomarbeit, Department of Mechanical Engineering, University of Washington, 1975.
 - [Pol79] A. Pollard. The numerical calculation of partially elliptic flows. *Numer. Heat Transfer*, 2:267–278, 1979.
 - [Pop75] S.B. Pope. A more general effective-viscosity hypothesis. *J. Fluid Mech.*, 72:331–339, 1975.
 - [PPE88] B.S. Petukhov, A.F. Polyakov und B.E. Launder (English Edition Editor). *Heat Transfer in Turbulent Mixed Convection*. Hemisphere, 1988.

- [PRS85] V.C. Patel, W. Rodi und G. Scheuerer. Turbulence Models for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows: A Review. *AIAA J.*, 23:1308–1319, 1985.
- [PS72] S.V. Patankar und D.B. Spalding. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15:1787–1806, 1972.
- [PW93] K. Ponweiser und H. Walter. *Erweiterung der NBS/NRC Wasserdampf Tafeln um die Umkehrfunktionen und deren Ableitungen*. VDI-Verlag, 1993.
- [Ram79] V. Ramachandra. *The Numerical Prediction of Flow and Heat Transfer in Rod-bundle Geometries*. Dissertation, Imperial College, 1979.
- [RB90] R. Rubinstein und J.M. Barton. Nonlinear Reynolds stress models and the renormalization group. *Phys. Fluids A*, 2(8):1472–1476, 1990.
- [RB91] R. Rubinstein und J.M. Barton. Renormalization group analysis of anisotropic diffusion in turbulent shear flows. *Phys. Fluids A*, 3(3):415–421, 1991.
- [Reh78] K. Rehme. The structure of turbulent flow through a wall subchannel of a rod bundle. *Nucl. Eng. Des.*, 45:311–323, 1978.
- [Reh87] K. Rehme. Convective Heat Transfer over Rod Bundles. In S. Kakaç, R.K. Shah und W. Aung, Hrsg., *Handbook of Single-Phase Heat Transfer*. Wiley, 1987.
- [Rei51] H. Reichardt. Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Rohren. *Z. Math. Mech.*, 31(7):208–219, 1951.
- [Rhi85] C.M. Rhie. A three-dimensional passage flow analysis method aimed at centrifugal impellers. *Comput. Fluids*, 13(4):443–460, 1985.
- [Riv57] R.S. Rivlin. The relation between the flow of non-Newtonian fluids and turbulent Newtonian fluids. *Q. Appl. Maths*, 15(2):212–215, 1957.
- [Roa72] P.J. Roache. *Computational Fluid Dynamics*. Hermosa, 1972.
- [Rod80] W. Rodi. Turbulence models and their application in hydraulics – a state of the art review. Technischer Bericht, Institut für Hydromechanik, Universität Karlsruhe, 1980.
- [Rot51] J. Rotta. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. *Z. Phys.*, 129:547–572, 1951.
- [Rot72] J.C. Rotta. *Turbulente Strömungen*. B.G. Teubner, 1972.
- [RRRA93] M.P. Reddy, L.G. Reifschneider, J.N. Reddy und H.U. Akay. Accuracy and convergence of element-by-element iterative solvers for incompressible fluid flows using penalty finite element model. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 17:1019–1033, 1993.

-
- [RS86] J.G. Rice und R.J. Schnipke. An equal-order velocity-pressure formulation that does not exhibit spurious pressure modes. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 58:135–149, 1986.
- [Rub81] M.W. Rubesin. Compressibility effects in turbulence modelling. In *The 1980/81 AFSOR-HTTM-STANFORD conference on complex turbulent flows: comparison of computation and experiment*, Bd. II, Seiten 713–723, 1981.
- [Rup97] O. Ruprecht. Modellierung des Einflusses rauher und beheizter Wände auf turbulente Strömungen. Studienarbeit, Institut für Wärme- und Brennstofftechnik, TU Braunschweig, 1997.
- [SAA92] C.G. Speziale, R. Abid und E.C. Anderson. Critical Evaluation of Two-Equation Models for Near-Wall Turbulence. *AIAA J.*, 30(2):324–331, 1992.
- [SB87] R.K. Shah und M.S. Bhatti. Laminar Convective Heat Transfer in Ducts. In S. Kakaç, R.K. Shah und W. Aung, Hrsg., *Handbook of Single-Phase Heat Transfer*. Wiley, 1987.
- [Sch77] U. Schumann. Realizability of Reynolds-stress turbulence models. *Phys. Fluids A*, 20(5):721–725, 1977.
- [Sch86] R.J. Schnipke. *A Streamline Upwind Finite Element Method for Laminar and Turbulent Flow*. Dissertation, University of Virginia, 1986.
- [Sch90] B.E. Schönung. *Numerische Strömungsmechanik : inkompressible Strömungen mit komplexen Berandungen*. Springer, 1990. Zugl.: Habilitationsschrift, Institut für Hydromechanik, Universität Karlsruhe.
- [Sch91] H.R. Schwarz. *Methode der finiten Elemente*. B.G. Teubner, 1991.
- [Sch93] H.R. Schwarz. *Numerische Mathematik*. B.G. Teubner, 1993.
- [Sea79] W.J. Seale. Turbulent diffusion of heat between connected flow passages, Part I: Outline of problem and experimental investigation. *Nucl. Eng. Des.*, 54:183–195, 1979.
- [Seg85] A. Segal. A review of some finite element methods to solve the stationary Navier-Stokes equations. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 5:269–280, 1985.
- [SG97] H. Schlichting und K. Gersten. *Grenzschicht-Theorie*. Springer, 9. Auflage, 1997.
- [Sha91] C.T. Shaw. Using a segregated finite element scheme to solve the incompressible Navier-Stokes equations. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 12:81–92, 1991.
- [SL59] E.M. Sparrow und A.L. Loeffler, Jr. Longitudinal Laminar Flow Between Cylinders Arranged in Regular Array. *A. I. Ch. E. Journal*, 5(3):325–330, 1959.
- [SL93] T.-H. Shih und J.L. Lumley. Remarks on Turbulent Constitutive Relations. *Mathl. Comput. Modelling*, 18(2):9–16, 1993.

- [SLS⁺94] T.-H. Shih, W.W. Liou, A. Shabbir, Z. Yang und J. Zhu. A New k - ϵ Eddy Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows – Model Development and Validation. Technischer Bericht E-9087/TM-106721, NASA, 1994.
- [Smi84] R.M. Smith. On the finite element calculation of turbulent flow using the k - ϵ model. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 4:303–319, 1984.
- [So81] R.M.C. So. Heat transfer modeling for turbulent shear flows on curved surfaces. *J. Appl. Math. Phys.*, 32:514–532, 1981.
- [Soh88] J.L. Sohn. Evaluation of Fidap on some classical laminar and turbulent benchmarks. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 8:1469–1490, 1988.
- [Spe87] C.G. Speziale. On nonlinear k - l and k - ϵ models of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 178:459–475, 1987.
- [Spe99] B. Specht. Das Programmsystem ductus zur Lösung der dreidimensionalen thermofluidodynamischen Gleichungen. Technischer Bericht K9901, Institut für Wärme- und Brennstofftechnik, TU Braunschweig, 1999.
- [SR87] R.J. Schnipke und J.G. Rice. A finite element method for free and forced convection heat transfer. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 24:117–128, 1987.
- [SR92] L.M. Smith und W.C. Reynolds. On the Yakhot-Orzag renormalization group method for deriving turbulence statistics and models. *Phys. Fluids A*, 4(2):364–390, 1992.
- [SRY78] G.E. Schneider, G.D. Raithby und M.M. Yovanovich. Finite-element solution procedures for solving the incompressible Navier-Stokes equations using equal order variable interpolation. *Numer. Heat Transfer*, 1:433–451, 1978.
- [Sta85] M.M. Stanišić. *The Mathematical Theory of Turbulence*. Springer, 1985.
- [Ste96] I. Steffens. Optimierte Funktionen zur Darstellung von Stoffwertabhängigkeiten. Diplomarbeit, Institut für Raumflug- und Reaktortechnik, TU Braunschweig, 1996.
- [SZL93] T.-H. Shih, J. Zhu und J.L. Lumley. A Realizable Reynolds Stress Algebraic Equation Model. Technischer Bericht E-7525/TM-105993, NASA, 1993.
- [SZL94a] T.-H. Shih, J. Zhu und J.L. Lumley. Modelling of the Wall-Bounded Complex Flows and Free Shear Flows. Technischer Bericht TM-106513, NASA, 1994.
- [SZL94b] T.-H. Shih, J. Zhu und J.L. Lumley. A New Reynolds Stress Algebraic Equation Model. Technischer Bericht E-8949/TM-106644, NASA, 1994.
- [Tau92] D.B. Taulbee. An improved algebraic Reynolds stress model and corresponding nonlinear stress model. *Phys. Fluids A*, 4(11):2555–2561, 1992.

-
- [TF91] M. Tabata und S. Fujima. An upwind finite element scheme for High-Reynolds-Number flows. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 12:305–322, 1991.
- [TK90] N.E. Todreas und M.S. Kazimi. *Nuclear Systems I*. Hemisphere, 1990.
- [Tru80] E. Truckenbrodt. *Fluidmechanik, Band 1 Grundlagen und elementare Strömungsvorgänge dichtebeständiger Fluide*. Springer, 1980.
- [Utn88] T. Utnes. Two-equation (k - ϵ) turbulence. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 8:965–975, 1988.
- [VDI84] *VDI-Wärmeatlas*. VDI-Verlag, 4. Auflage, 1984.
- [Vio87] P.L. Viollet. The modelling of turbulence recirculating flows for the purpose of reactor thermal-hydraulic analysis. *Nucl. Eng. Des.*, 99:365–377, 1987.
- [YO84] V. Yakhot und S.A. Orzag. Renormalization group analysis of turbulence. *J. Sci. Comput.*, 1:3–51, 1984.
- [Yos84] A. Yoshizawa. Statistical analysis of the deviation of the Reynolds stress from its eddy-viscosity representation. *Phys. Fluids A*, 27(6):1377–1387, 1984.
- [YOT⁺92] V. Yakhot, S.A. Orszag, S. Thangam, T.B. Gatski und C.G. Speziale. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique. *Phys. Fluids A*, 4(7):1510–1518, 1992.

A. Anhang zur Modellierung

A.1. Die gemittelten Bilanzgleichungen

Mit den Zerlegungen

$$v_i = \tilde{v}_i + v_i'', \quad \rho = \bar{\rho} + \rho', \quad p = \bar{p} + p', \quad T = \bar{T} + T',$$

$$\nu = \tilde{\nu} + \nu'', \quad c_p = \tilde{c}_p + c_p'', \quad \lambda = \bar{\lambda} + \lambda' \quad \text{und} \quad \beta = \bar{\beta} + \beta'$$

(also $\bar{\rho}\tilde{\nu} = \bar{\mu}$) ergeben sich aus der Mittelung der Bilanzgleichungen (2.1), (2.2) und (2.3) mit den Gleichungen (2.5) für den Spannungstensor und (2.6) für den Wärmestrom unter der Voraussetzung, daß Fluktuationen (nicht aber Gradienten) der Größen c_p , β , λ und ν vernachlässigt werden können, die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \tilde{v}_k) = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{v}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \tilde{v}_j &= \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{v}_j}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{v}_j \tilde{v}_k}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\bar{\rho} \tilde{\nu} \left(\frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \frac{\partial \tilde{v}_l}{\partial x_l} \right) - \bar{\rho} \widetilde{v_j'' v_k''} \right) \\ &\quad - \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j} + \bar{\rho} g_j, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \tilde{c}_p \left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{v}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \bar{T} &= \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{c}_p \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{c}_p \tilde{v}_k \bar{T}}{\partial x_k} - \bar{\rho} \bar{T} \frac{\partial \tilde{c}_p}{\partial t} - \bar{\rho} \tilde{v}_k \bar{T} \frac{\partial \tilde{c}_p}{\partial x_k} \\ &= \bar{\beta} \bar{T} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{v}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \bar{p} + \bar{\beta} \widetilde{T' v_k''} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_k} + \bar{\rho} \widetilde{T' v_k''} \frac{\partial \tilde{c}_p}{\partial x_k} \\ &\quad + \bar{\rho} \tilde{\nu} \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \frac{\partial \tilde{v}_l}{\partial x_l} \right) + \bar{\rho} \tilde{\varepsilon} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\bar{\lambda} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\bar{\rho} \tilde{c}_p \widetilde{T' v_k''} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Der in Gleichung (A.2) auftretende Tensor $\bar{\rho} \widetilde{v_i'' v_j''}$ heißt Reynoldsscher Spannungstensor, weil er in der gleichen Weise in der Impulsbilanz modelliert wird wie der viskose Spannungstensor τ_{ij} . Manchmal wird auch $\widetilde{v_i'' v_j''}$ als Reynoldsscher Spannungstensor bezeichnet.

In der gemittelten Energiebilanzgleichung tritt zu der molekularen Wärmestromdichte $-\overline{\lambda} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_k}$ noch die Reynoldssche Wärmestromdichte $\overline{\rho} \tilde{c}_p \widetilde{v'_k T'}$ hinzu. Die Ausdrücke, die Druckfluktuationen oder den Druck enthalten, und die aus dem Dissipationsterm $\tau_{jk} \frac{\partial v_j}{\partial x_k}$ resultierenden Terme werden für inkompressible Strömungen meist vernachlässigt.

Für kompressible Strömungen könnten außer in der Nähe von Stoßwellen, die in den untersuchten Strömungsfällen nicht auftreten, ebenfalls die aus dem Druckterm resultierenden Ausdrücke in der gemittelten Energiebilanzgleichung vernachlässigt werden.

Aus den Geschwindigkeitsschwankungen im Dissipationsterm $\tau_{jk} \frac{\partial v_j}{\partial x_k}$ resultiert die Dissipation von Turbulenzenergie

$$\begin{aligned} \overline{\rho} \tilde{\varepsilon} &= \overline{\rho \nu \frac{\partial v''_j}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v''_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v''_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \frac{\partial v''_l}{\partial x_l} \right)} \\ &= \overline{\rho \nu \left(\frac{\partial v''_j}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v''_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v''_k}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial v''_l}{\partial x_l} \frac{\partial v''_m}{\partial x_m} \right)}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Für konstante Stoffwerte gilt

$$\tilde{\varepsilon} = \overline{\varepsilon} = \nu \overline{\frac{\partial v'_j}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \right)}.$$

Ist die Turbulenz isotrop (für große Werte der Reynolds-Zahl), gilt nach [Rot51] für konstante Stoffwerte die oft für ε angegebene Form

$$\overline{\varepsilon} = \nu \overline{\left(\frac{\partial v'_j}{\partial x_k} \right)^2}.$$

A.2. Modellierung der Turbulenz

A.2.1. Bilanzgleichungen der Turbulenzfeldgrößen

Die bei Ein- und Zwei-Gleichungs-Modellen berücksichtigte Transportgleichung für die mittlere Energie der Turbulenz \tilde{k} kann aus den Navier-Stokesschen Gleichungen (2.2) gewonnen werden, indem die i-te Komponente mit v_i multipliziert, die resultierende Gleichung gemittelt und das Ergebnis für i von 1 bis 3 summiert wird. Die sich ergebende Gleichung lautet unter der Voraussetzung $\rho' \ll \overline{\rho}$ und unter Vernachlässigung der Fluktuation von ν

$$\begin{aligned} \overline{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{v}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \tilde{k} &= \underbrace{\overline{\rho} \mathcal{P}_k}_{\text{Produktion}} - \underbrace{\overline{\rho} \tilde{\varepsilon}}_{\text{Dissipation}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\rho} \tilde{\nu} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right)}_{\text{molekulare Diffusion}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\rho} \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right)}_{\text{turbulente Diffusion}} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

mit dem Turbulenzenergieproduktionsterm

$$\mathcal{P}_k = -\widetilde{v_i'' v_j''} \partial \tilde{v}_i / \partial x_j. \quad (\text{A.6})$$

In der Differentialgleichung für die Turbulenzenergie sind lediglich die Diffusionsterme modelliert. Der turbulente, diffusive Transport der Turbulenzenergie durch Druck und Geschwindigkeitsschwankungen wird dabei als proportional zum Gradienten der Turbulenzenergie angenommen. Bei hohen Werten der Reynolds-Zahl kann die molekulare Diffusion der Turbulenzenergie gegen die durch die Turbulenz angetriebene Diffusion von \tilde{k} vernachlässigt werden.

Die Form der Modellierung der Diffusionsterme sowie die auftretenden Konstanten können außer durch Empirie auch durch Formalismen wie DIA (direct interaction formalism, siehe beispielsweise [Yos84]) oder RNG (renormalization group approach, siehe beispielsweise [YO84], [SR92] und [YOT⁺92]) direkt aus den Navier-Stokesschen Gleichungen bestimmt werden. Die Werte der von verschiedenen Autoren verwendeten Modellkonstanten befinden sich im Anhang A.4.

Die Transportgleichung für die Dissipation ist auf folgendem Wege aus der Impulsbilanz zu gewinnen: Es wird die Differenz der j-ten Komponente der Impulsbilanz (2.2) und der gemittelten Impulsbilanz (A.2) gebildet, die sich ergebende Gleichung nach x_i partiell abgeleitet, das Ergebnis mit $\nu(\partial v'_i / \partial x_j + \partial v'_j / \partial x_i)$ multipliziert und schließlich die resultierende Gleichung gemittelt. Das Ergebnis hat dann unter der Voraussetzung $\rho' \ll \bar{\rho}$ und unter Vernachlässigung der Fluktuation von ν folgende Form:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{v}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \tilde{\varepsilon} = & \underbrace{c_{\varepsilon 1} \bar{\rho} \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{k}} \mathcal{P}_k - c_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\tilde{k}}}_{\text{Produktion und Dissipation}} \\ & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho} \tilde{\nu} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right)}_{\text{molekulare Diffusion}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho} \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right)}_{\text{turbulente Diffusion}}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Die einzelnen auf der rechten Seite der Gleichung auftretenden Terme können bisher nicht experimentell gemessen werden und sind alle modelliert. Bei der Modellierung kann man sich daran orientieren, wie gut das jeweilige Modell Experimente wiederzugeben vermag. Eine weitere Verifikationsmöglichkeit bilden die mit Hilfe einer direkten Lösung (sofern verfügbar) des turbulenten Problems mittels der Navier-Stokes-Gleichungen erhaltenen Werte. Mit Hilfe der RNG-Methode ist es möglich, die Modellierung direkt zu verifizieren und die auftretenden Konstanten zu bestimmen. Alternativ zu der angegebenen Modellierung des Produktions- und Dissipationsterms sind andere Modelle vorgeschlagen worden [YOT⁺92], [SLS⁺94], die in Abschnitt 3.1 wiedergegeben sind.

Bei Verwendung der Wirbelviskosität ν_t (siehe Abschnitt A.2.2) werden die durch Turbulenz bedingten Diffusionsterme analog zu den viskosen Diffusionstermen mit den Austauschkoefizienten ν_t / σ_k und $\nu_t / \sigma_\varepsilon$ modelliert. Die Größen σ_k und σ_ε gehen als Konstanten in das

Modell ein (siehe Anhang A.4). Der turbulente Transport (Diffusion aufgrund von Druck- und Geschwindigkeitsschwankungen) wird damit analog zu dem entsprechenden Term in der Gleichung der Turbulenzenergie modelliert; Produktions- und der Dissipationsterm (Produktion durch Turbulenz und Umwandlung durch Zähigkeit) können nur zusammen modelliert werden.

A.2.2. Korrelationen der turbulenten Schwankungsgrößen

Bei der Berechnung kompressibler Strömungen treten im Gegensatz zu inkompressiblen Strömungen nicht nach Reynolds, sondern nach Favré gemittelte Korrelationen auf. Nach der Morkovin-Hypothese ist der Einfluß der Kompressibilität auf die Korrelationen vernachlässigbar, wenn die auftretenden Schwankungen der Mach-Zahl kleiner als 1 sind. Diese Forderung ist bei nicht abgelösten Strömungen bis etwa $Ma = 5$ [Rot72], [Mar83] und bei Freistrahlen bis etwa $Ma = 1.5$ [Sch90] erfüllt. In diesen Fällen und speziell für die in dieser Arbeit untersuchten Strömungen können die Korrelationen daher analog zum inkompressiblen Fall modelliert werden.

Der Ansatz für die Reynoldsschen Spannungen ist in Gleichung (2.9) wiedergegeben und basiert auf der Annahme, daß die Wirkung der turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen durch eine skalare Wirbelviskosität beschrieben werden kann. Auf dieser Vorstellung basieren auch die in Abschnitt A.2.1 wiedergegebenen Modellierungen der Diffusion der Turbulenzenergie und ihrer Dissipation.

Der Ansatz für die Geschwindigkeits-Temperatur-Korrelation erfolgt im einfachsten Fall analog zum Fourierschen Ansatz (2.6) für die Wärmestromdichte [CB88]:

$$-\widetilde{v_i''T'} = \frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i}. \quad (A.8)$$

Die turbulente Prandtl-Zahl ist im allgemeinen eine Funktion der molekularen Prandtl-Zahl, der Reynolds-Zahl und des Wandabstands oder des Verhältnisses ν_t/ν [Jis82].

A.3. Modellierung wandnaher Turbulenz

Im stationären Fall lautet das eindimensionale Differentialgleichungssystem zur Berechnung der Tangentialgeschwindigkeit, der Turbulenzenergie, ihrer Dissipation und der Temperatur mit dem Wandabstand y , der Wandschubspannung u_τ , den mit 1 indizierten Materialwerten am wandnächsten Knoten, der Definition $c_{nl} = (c_{\tau 1} - 2 c_{\tau 3})/2$ und der Normierung

$$y^+ = \frac{y}{\nu_1/u_\tau}, \quad u^+ = \frac{\tilde{v} e_t}{u_\tau}, \quad k^+ = \frac{\tilde{k}}{u_\tau^2}, \quad \varepsilon^+ = \frac{\tilde{\varepsilon}}{u_\tau^4/\nu_1}, \quad T^+ = \frac{T_w - \overline{T}}{\Delta T} \quad \text{mit} \quad \Delta T = \frac{\dot{q}_w}{\rho_1 c_{p1} u_\tau},$$

$$\nu_t^+ = c_\mu f_\mu \frac{k^{+2}}{\varepsilon^+} = \frac{\nu_t}{\nu_1}, \quad \rho^+ = \frac{\overline{\rho}}{\rho_0}, \quad \nu^+ = \frac{\tilde{\nu}}{\nu_0}, \quad \beta^+ = \frac{\overline{\beta}}{\beta_0}, \quad c_p^+ = \frac{\tilde{c}_p}{c_{p,0}} \quad \text{und} \quad \lambda^+ = \frac{\overline{\lambda}}{\lambda_0}$$

unter Verwendung der nichtlinearen Modellierung (3.3) der Reynoldsschen Spannungen:

$$0 = -t_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \frac{\nu_1}{\rho_0 u_\tau^3} + \rho^* \frac{\nu_1 g e_t}{u_\tau^3} + \frac{\partial}{\partial y^+} \left(f_r \rho^* \left(\frac{\nu_0}{\nu_1} \nu^* + \nu_t^+ \right) \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right) \quad (\text{A.9})$$

$$\text{mit } \sigma_t = -\rho_0 u_\tau^2 f_r \rho^* \left(\frac{\nu_0}{\nu_1} \nu^* + \nu_t^+ \right) \frac{\partial u^+}{\partial y^+},$$

$$0 = \rho^* \nu_t^+ f_r^2 \left(\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)^2 - \rho^* \varepsilon^+ + \frac{\partial}{\partial y^+} \left(\rho^* \left(\frac{\nu_0}{\nu_1} \nu^* + \frac{\nu_t^+}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^+}{\partial y^+} \right), \quad (\text{A.10})$$

$$\text{mit } \dot{q}_k = -\rho_0 u_\tau^3 \rho^* \left(\frac{\nu_0}{\nu_1} \nu^* + \frac{\nu_t^+}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^+}{\partial y^+},$$

$$0 = c_{\varepsilon 1} f_1 \rho^* \nu_t^+ \frac{\varepsilon^+}{k^+} \left(\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)^2 - c_{\varepsilon 2} f_2 \rho^* \frac{\varepsilon^{+2}}{k^+} + \frac{\partial}{\partial y^+} \left(\rho^* \left(\frac{\nu_0}{\nu_1} \nu^* + \frac{\nu_t^+}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon^+}{\partial y^+} \right), \quad (\text{A.11})$$

$$\text{mit } \dot{q}_\varepsilon = -\frac{\rho_0 u_\tau^5}{\nu_1} \rho^* \left(\frac{\nu_0}{\nu_1} \nu^* + \frac{\nu_t^+}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon^+}{\partial y^+},$$

$$0 = u^+ \beta^* (\beta_0 T_w - T^+ \beta_0 \Delta T) (\underline{e}_t)_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \frac{\nu_1}{\rho_0 u_\tau^3} + \frac{\nu_0}{\nu_1} \rho^* \nu^* f_r^2 \left(\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)^2 + \rho^* \varepsilon^+ \quad (\text{A.12})$$

$$+ \frac{\nu_t^+}{\text{Pr}_t} f_T \left(1 - f_\mu c_{nl} \left(\frac{k^+}{\varepsilon^+} \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)^2 \right) \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \rho^* \frac{\partial c_p^*}{\partial y^+} \frac{c_{p0}}{c_{p1}} \frac{\dot{q}_w}{\rho_1 u_\tau^3}$$

$$- \frac{\partial}{\partial y^+} \left(f_T \frac{c_{p0}}{c_{p1}} \frac{\dot{q}_w}{\rho_1 u_\tau^3} \left(\lambda^* \frac{1}{\text{Pr}_0} \frac{\nu_0}{\nu_1} + \rho^* c_p^* \frac{\nu_t^+}{\text{Pr}_t} \left(1 - f_\mu c_{nl} \left(\frac{k^+}{\varepsilon^+} \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)^2 \right) \right) \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right)$$

$$\text{mit } \dot{q}_{\text{ges}} = \dot{q}_w f_T \frac{c_{p0}}{c_{p1}} \frac{\rho_0}{\rho_1} \left(\lambda^* \frac{1}{\text{Pr}_0} \frac{\nu_0}{\nu_1} + \rho^* c_p^* \frac{\nu_t^+}{\text{Pr}_t} \left(1 - f_\mu c_{nl} \left(\frac{k^+}{\varepsilon^+} \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)^2 \right) \right) \frac{\partial T^+}{\partial y^+}.$$

Flüsse positiven Vorzeichens sind dabei Flußdichten in Wandnormalenrichtung, das heißt von der Wand weg weisend. Verschwindet \dot{q}_w , wird \dot{q}_w in der Energiebilanz durch $\Delta T \rho_1 c_{p1} u_\tau$ ersetzt und für ΔT ein Wert ungleich Null gewählt.

Wie eine im Rahmen dieser Arbeit durchgeführte Studienarbeit zeigt, erbringt die Verwendung anderer Diffusionsansätze und Dämpfungsfunktionen als den im Anhang A.4.5 angegebenen keine verbesserte (unter Umständen sogar eine schlechtere) Übereinstimmung mit experimentellen Daten [Hil95].

A.4. Modellkoeffizienten

A.4.1. Koeffizienten in den Gleichungen für k und ε

Für die im Standard- k - ε -Modell auftretenden Koeffizienten werden oft konstante, in Tabelle A.1 wiedergegebene Werte verwendet. In der abgesetzten ersten Zeile finden sich die meistverwendeten Werte.

Quelle	c_μ	$c_{\varepsilon 1}$	$c_{\varepsilon 2}$	σ_k	σ_ε
[LS74], [Ben88b]	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3
[HL72]		1.45	2.0		
[HL76]		1.275	1.8		
[MK90], [MK91]	0.09	1.4	1.8	1.4	1.3
[NT90]	0.09	1.45	1.9	1.4	1.3
[GS92]	0.09	1.44	1.83	1.0	1.3
[YOT+92]	0.0845	1.42*	1.68	0.719	0.719
[SLS+94]	0.09*	1.43*	1.9	1.0	1.2

* im Bereich der Gültigkeit des logarithmischen Wandgesetzes

Tabelle A.1.: Werte für die Koeffizienten des Standard- k - ε -Modells

Damit die angegebenen Werte im Gültigkeitsbereich des logarithmischen Wandgesetzes konsistent sind, ist die Bedingung

$$\sigma_\varepsilon = \frac{\kappa^2}{(c_{\varepsilon 2} - c_{\varepsilon 1}) \sqrt{c_\mu}}$$

siehe [LS74], [DR84], [PRS85] und [YOT+92] zu erfüllen mit der von Kármánschen Konstante $\kappa = 0.41 \pm 0.015$ [PRS85].

Auch der Wert des Koeffizienten c_μ kann vom lokalen Strömungsfeld abhängen. Der Koeffizient c_μ taucht auch in der Modellierung der Reynoldsschen Spannungen auf; er wird daher im folgenden Abschnitt behandelt.

In Abschnitt 5.2 werden Rechnungen mit unterschiedlichen Sätzen konstanter Koeffizienten einander gegenübergestellt. Dabei werden neben den Werten des Standard- k - ε -Modells nach [LS74], die den in [GS92] angegebenen Werten sehr ähnlich sind, die Koeffizienten nach [MK90], [MK91] verwendet, die wiederum nur wenig von den in [NT90] angegebenen Werten abweichen. Es werden auch die in [YOT+92] und [SLS+94] angegebenen Werte verwendet, die in den Veröffentlichungen nur zusammen mit gegenüber dem Standard- k - ε -Modell modifizierten Transportgleichungen zur Anwendung kommen.

A.4.2. Koeffizienten der Spannungsmodellierungen

Aus der generellen Forderung der Kontinuumsmechanik nach der Unabhängigkeit der Lösung vom Beobachtersystem folgt $2c_{\tau 2} = c_{\tau 1} + c_{\tau 3}$ [RB90], wodurch die Anzahl der unabhängigen Koeffizienten der nichtlinearen Terme auf zwei reduziert wird. Zusätzlich ist zur Bestimmung der Reynoldsschen Spannungen, und in manchen Modellen auch zur Bestimmung der nichtlinearen Terme, der Koeffizient c_μ notwendig. Gegenüber dem Einfluß der nichtlinearen Terme überwiegt in manchen Strömungen der Einfluß der c_μ -Funktion [Bä00].

In der Formulierung von Baker [Bak82], [Bak83] wird der erste Term der Gleichung (3.3), $-\frac{2}{3} \delta_{ij} \tilde{k}$, durch $-\frac{2}{3} c_i \delta_{ij} \tilde{k}$ ersetzt mit Konstanten c_i ungleich 1, um eine Anisotropie der Normalspannungen zu erreichen (\underline{c} ist in Hauptströmungsrichtung am größten). Baker führt alle

in seinem nichtlinearen Modell vorkommenden Konstanten auf zwei „universelle empirische Konstanten“ zurück. Bei allen anderen in dieser Arbeit zitierten nichtlinearen Modellen ist $c_i = 1$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Die guten Ergebnisse, die für einfache Kanalströmungen erzielt werden, sind wohl dieser an das Experiment angepaßten Anisotropie zuzuschreiben. Der vorgeschlagene nichtlineare Ansatz beruht auf der (unzutreffenden [SL93]) Annahme, daß sich die Geschwindigkeitskorrelation allgemein als Potenzreihe nur des Spannungstensors schreiben läßt. In dieser Arbeit wird dieser Ansatz nur mit $c_i = 1$ verwendet, um den nichtlinearen Ansatz für die Reynoldsschen Spannungen in der allgemeingültigen Form (3.3) verwenden zu können.

Der von Speziale [Spe87] verwendete nichtlineare Zusammenhang von turbulenter Schubspannung und den Gradienten des mittleren Strömungsfelds läßt sich auf zweierlei Weise motivieren. Zum einen läßt sich ein solcher Ansatz deduktiv von der Navier-Stokesschen Gleichung ableiten. Zum anderen ist er auch physikalisch naheliegend, da die turbulente Strömung eines Newtonschen Fluides mit der laminaren Strömung (nicht-Newtonscher) organischer Fluide (speziell mit der des Rivlin-Ericksen Fluides) mit nichtlinearem Schubspannungsgesetz (ähnlich dem von Speziale vorgestellten nichtlinearen Gesetz für die turbulente Schubspannung) starke Ähnlichkeit besitzt [Riv57]. In dem nichtlinearen Turbulenzmodell von Speziale tauchen zusätzlich zur oben angegebenen Form konvektive Glieder im nichtlinearen Glied auf, die jedoch nach der später von Speziale mitverfaßten Veröffentlichung [YOT⁺92] vernachlässigt werden können.

Bei Annahme des oben angegebenen nichtlinearen Zusammenhangs lassen sich die darin enthaltenen Konstanten mit Hilfe der RNG-Methode direkt aus den Grundgleichungen ableiten [YO84], [RB90]. Dabei wird die Wirkung der Turbulenz durch eine zufallsverteilte Kraft (Rauschen) unter Zugrundelegen eines Kolmogorovschen Energiespektrums und Gaußscher Zufallsverteilung für die Kraft in der Impulsbilanz simuliert. Die so gewonnenen Ansätze und Parameter zur Turbulenzmodellierung sowohl der modellierten Terme in den Differentialgleichungen für \tilde{k} und $\tilde{\varepsilon}$ als auch der Korrelationen sind, da sie direkt aus den Grundgleichungen ableitbar sind, nicht an experimentelle Daten von speziellen Strömungen angepaßt.

In [RB90] sind zusätzlich zu den mittels des RNG-Formalismus gewonnenen Parametern weitere Konstantensätze aufgeführt, die entweder empirisch bestimmt oder aus einer Taylorentwicklung eines algebraischen Reynoldsspannungsmodells abgeleitet wurden. In [SZL94a], [SZL94b] werden Funktionen für die Koeffizienten in Abhängigkeit der Invarianten des Spannungstensors vorgeschlagen, die unter Beachtung allgemeiner Bedingungen (wie realizability) durch Anpassung an experimentelle Daten unterschiedlicher Strömungen gewonnen wurden.

In den Arbeiten [Pop75], [GS92], [Tau92], [Gir95] und [Gir96] werden die Koeffizienten aus differentiellen Reynoldsspannungsmodellen abgeleitet. Die so erhaltenen Modelle sind zum Teil über $\mathcal{P}_k/\tilde{\varepsilon}$ implizit, da \mathcal{P}_k von den Reynoldsschen Spannungen abhängt. Sie lassen sich dann mittels $\mathcal{P}_k/\tilde{\varepsilon} = (c_{\varepsilon 2} - 1)/(c_{\varepsilon 1} - 1)$ in explizite Form bringen, wobei sie ihre Gültigkeit für Nichtgleichgewichtströmungen verlieren.

In der Literatur angegebene Werte oder Funktionen für die in nichtlinearen Modellierungen der Reynoldsschen Spannungen nach Gleichung (3.3)/(3.23) auftretenden Koeffizienten sind

in den Tabellen A.2, A.3 und A.4 zusammengestellt. Die zu ihrer Bestimmung notwendigen Koeffizienten aus differentiellen Reynoldsspannungsmodellen (nach [GS92] und [Tau92]) sind in Tabelle A.5 wiedergegeben.

Quelle	c_μ	$c_{\tau 1}$	$c_{\tau 2}$	$c_{\tau 3}$
[Bak82], [BO83]	0.136	-0.00456	-0.00456	-0.00456
[Spe87], [GS92]		$5.04 c_\mu^2$	$1.68 c_\mu^2$	$-1.68 c_\mu^2$
[RB90] (RNG)	0.0845	0.034	0.104	-0.014
(nach Nisizama)	0.0845	0.057	-0.167	-0.0067
(nach [DR84])	0.09	0.092	0.052	0.013

Tabelle A.2.: Konstante Koeffizienten der nichtlinearen Modellierungen der Reynoldsschen Spannungen

Quelle	c_μ	$c_{\tau 1}$	$c_{\tau 2}$	$c_{\tau 3}$
[SZL93]	$\frac{2/3}{1.25+\sqrt{2}\eta+0.9\sqrt{2}\xi}$	$\frac{13}{h}$	$\frac{-4}{h}$	$\frac{-2}{h}$
	$h = 1000 + (\sqrt{2}\eta)^3$			
[SZL94a]	$\frac{2/3}{5.5+\sqrt{2}\eta}$	$\frac{13}{h}$	$\frac{-4}{h}$	$\frac{-2}{h}$
	$h = 1000 + (\sqrt{2}\eta)^3 + (\sqrt{2}\xi)^3$			
[SLS ⁺ 94]	$\frac{1}{4.0+A_s\sqrt{\eta^2+\xi^2}}$	0	0	0
[SZL94b]	$\frac{1}{6.5+A_s\sqrt{\eta^2+\xi^2}}$	$\frac{\sqrt{1-9c_\mu^2\eta^2}}{1+6\eta\xi}$	0	$-\frac{\sqrt{1-9c_\mu^2\eta^2}}{1+6\eta\xi}$
	$A_s = \sqrt{6} \cos(\frac{1}{3} \arccos(\sqrt{6} \eta_3^3/\eta^3))$			
	[Gir95], [Gir96]	siehe unten	$\frac{-(L_3+L_4)c_\mu}{L_0+L_1\eta^2c_\mu}$	$\frac{-L_3c_\mu}{L_0+L_1\eta^2c_\mu}$
	$c_\mu = \begin{cases} -L_0L_2/(L_0^2 - \frac{2}{3}L_3^2\eta^2 + 2L_4^2\xi^2) & \text{für } L_1\eta^2 = 0 \\ p + \sqrt[3]{b + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{b - \sqrt{D}} & \text{für } D \geq 0 \\ p - 2\sqrt{a}\cos(\Theta/3) & \text{für } D < 0 \text{ und } b < 0^* \\ p - 2\sqrt{a}\cos((\Theta + 4\pi)/3) & \text{für } D < 0 \text{ und } b = 0^* \\ p - 2\sqrt{a}\cos((\Theta + 2\pi)/3) & \text{für } D < 0 \text{ und } b > 0 \end{cases}$			
	* tritt bei den unten angegebenen Konstanten nicht auf			
	$p = -\frac{2L_0}{3L_1\eta^2}, q = \frac{(\frac{2}{3}L_3^2-L_1L_2)\eta^2-2L_4^2\xi^2-L_0^2}{3L_1^2\eta^4}, r = -\frac{L_0L_2}{3L_1^2\eta^4}$			
	$a = p^2 + q, b = p^3 + \frac{3}{2}(pq + r),$			
	$D = b^2 - a^3, \Theta = \arccos(-b/a^{3/2}) \in [0, \pi]$			
	$L_2 = \frac{C_2}{2} - \frac{2}{3}, L_3 = \frac{C_3}{2} - 1, L_4 = \frac{C_4}{2} - 1$			
nach [GS92]	$L_0 = \frac{C_1}{2} - 1, L_1 = 2$			
nach [Tau92]	$L_0 = \frac{C_1}{2} - 2 + c_{\varepsilon 2}, L_1 = 4 - 2c_{\varepsilon 1}$			

Tabelle A.3.: Nichtkonstante Koeffizienten der nichtlinearen Modellierungen der Reynoldsschen Spannungen, explizite Formulierungen

Quelle	c_μ	$c_{\tau 1}$	$c_{\tau 2}$	$c_{\tau 3}$
[Pop75]	$\frac{4}{15}g/(1 + 2\xi^2 g^2 b_3^2 - \frac{2}{3}\eta^2 g^2 b_2^2)$	$c_\mu g b_3$	0	$-c_\mu g b_3$
	$g = (C_1/2 + \mathcal{P}_k/\varepsilon - 1)^{-1},$ $b_2 = \frac{1}{11} (5 - 9 C_2/2), b_3 = \frac{1}{11} (1 + 7 C_2/2)$ zusätzlicher Term $\frac{2}{3}c_\mu g b_2 \eta^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$			
[GS92]	$(\frac{2}{3} - \frac{C_2}{2}) g$	$c_\mu \frac{C_4 - C_3}{2} g$	$c_\mu \frac{2 - C_3}{2} g$	$c_\mu \frac{4 - C_3 - C_4}{2} g$
	$g = (C_1/2 + \mathcal{P}_k/\varepsilon - 1)^{-1},$			
[Tau92]	wie [Pop75], jedoch $g = \left(C_1/2 + c_{\varepsilon 2} - 2 + (2 - c_{\varepsilon 1}) \frac{\mathcal{P}_k}{\varepsilon} + \frac{1}{\text{Sl}} \frac{(k^*/\varepsilon^*)^2}{\eta} \frac{D\eta\varepsilon^*/k^*}{Dt} \right)^{-1}$			

Tabelle A.4.: Nichtkonstante Koeffizienten der nichtlinearen Modellierungen der Reynoldsschen Spannungen, implizite Formulierungen

Reynoldsspannungsmodell	Kürzel	C_1	C_2	C_3	C_4
Launder, Reece, Rodi	LRR	3.0	0.8	1.75	1.31
Gibson, Launder	GL	3.6	0.8	1.2	1.2
Speziale, Sakar, Gatski	SSG	6.80*	0.36*	1.25	0.40
Taulbee nach Harris, Graham, Corrsin	HGC	3.6	0.8	1.94	1.16

* Gleichgewichtswerte

Tabelle A.5.: Differentiellen Reynoldsspannungsmodellen entnommene Koeffizienten

Die Zahlenwerte können von den in den Literaturstellen angegebenen Werten abweichen, da die Definition der Deformation, der Invarianten und der Koeffizienten uneinheitlich ist. In dieser Arbeit werden die Definitionen nach den Gleichungen (3.1), (3.2) und (3.3) zugrundegelegt.

Für den in Abschnitt 5.2 beschriebenen Vergleich von Ergebnissen verschiedener Turbulenzmodelle werden auch nichtlineare Turbulenzmodelle mit konstanten und mit variablen Koeffizienten einander gegenübergestellt. Es werden die konstanten Koeffizienten nach Tabelle A.2 verwendet. Von den nichtkonstanten Koeffizienten werden die neuesten Modelle nach [SLS⁺94], [SZL94b] und [Gir95]/[Gir96] verwendet, wobei bei dem letztgenannten Modell sowohl die in Tabelle A.3 angegebenen Konstanten L_0 und L_1 nach [GS92] als auch nach [Tau92] verwendet werden. Die benötigten Koeffizienten aus differentiellen Reynoldsspannungsmodellen C_1 bis C_4 werden Tabelle A.5 entnommen.

A.4.3. Die turbulente Prandtl-Zahl

Eine gute Modellierung der Turbulenzstruktur der betrachteten Strömung ist für die Modellierung des Wärmetransports von größerer Bedeutung als die Tatsache, ob die Modellierung des turbulenten Wärmestroms mittels einer konstanten turbulenten Prandtl-Zahl

oder einer eigenen differentiellen Transportgleichung vorgenommen wird [So81]. Es ist daher zu erwarten, daß die erreichbare Verbesserung der Modellierung durch eine Nachbildung der Abhängigkeiten der turbulenten Prandtl-Zahl von der molekularen Prandtl-Zahl, der Reynolds-Zahl und des Wandabstands oder des Verhältnisses ν_t/ν , insbesondere in Anbetracht der Streuung experimenteller Daten und der damit verbundenen Unsicherheit bei der Modellierung der turbulenten Prandtl-Zahl, gegenüber der simplen Verwendung einer konstanten turbulenten Prandtl-Zahl gering sein wird; siehe beispielsweise [Jis82, Abbildung 6.1] zur Abhängigkeit der turbulenten Prandtl-Zahl von der molekularen Prandtl-Zahl sowie der Reynolds-Zahl und [KR63, Abbildung 11] zur Abhängigkeit der turbulenten Prandtl-Zahl vom Wandabstand und der Reynolds-Zahl, beide bei ausgebildeter Rohrströmung.

Für die turbulente Prandtl-Zahl werden außer für sehr kleine Werte der Prandtl-Zahl in der Regel Werte von 0.7 bis 0.9 verwendet, siehe Tabelle A.6.

Quelle	[RB91]	[SG97]	[Jay69]	[So81]
Pr_t	0.718	0.87	0.90	0.92

Tabelle A.6.: Beispiele für Werte der turbulenten Prandtl-Zahl

In [RB91] werden mittels RNG- und DIA-Formalismus gewonnene Konstantensätze für die Koeffizienten der Gleichung (3.4)/(3.27) angegeben, siehe Tabelle A.7. Dabei ist $c_{T1} = -c_\mu/\text{Pr}_t$.

Koeffizient	c_{T1}	c_{T2}	c_{T3}
RNG	0.118	-0.166	-0.076
DIA	0.118	-0.032	-0.032

Tabelle A.7.: Koeffizienten der Gleichung (3.4)/(3.27) nach [RB91]

Der nichtlineare Ansatz (3.5)/(3.28) geht für $-\widetilde{v''_i v''_j} = -\frac{2}{3} \delta_{ij} \tilde{k}$ in die Form (A.8) über, falls $c_T = \frac{3}{2} \frac{c_\mu}{\text{Pr}_t}$ ist. Damit ist $c_T \approx 0.15$. In [Lau89] wird dagegen $c_T = 0.3$ verwendet.

A.4.4. Universelle Wandfunktionen

Unter den Voraussetzungen, daß Stoffwertänderungen in Wandnähe die Strömung nicht beeinflussen und die Dissipation in Wandnähe vernachlässigbar ist, sind der Verlauf der auf die Wandschubspannungsgeschwindigkeit bezogenen mittleren wandparallelen Geschwindigkeit $u^+ = |\tilde{v}|/u_\tau$ und der Verlauf der normierten Temperatur $T^+ = (\bar{T} - \bar{T}_w) c_p \rho u_\tau / \dot{q}_w$ mit der Wärmestromdichte \dot{q}_w in Abhängigkeit des dimensionslosen Wandabstands $y^+ = y/(\nu/u_\tau)$ bei gegebener Wandbeschaffenheit universelle Funktionen.

Für glatte Wände gibt es eine Vielzahl von Formulierungen der Geschwindigkeitswandfunktion, die alle im Bereich der Meßwerte liegen (siehe [KR63, Abbildung 8]). Für den Bereich

$y^+ > 30$ wird meist das logarithmische Wandgesetz

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(E y^+) = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + \frac{1}{\kappa} \ln E$$

mit $(\ln E)/\kappa \approx 5.5$ verwendet. Im Bereich von der Wand bis zu $y^+ > 200$ gibt es Funktionen, die stetig differenzierbar sind, wie beispielsweise die von Reichardt gefundene Funktion [Rei51]

$$u^+ = 2.5 \ln(1 + 0.4 y^+) + 7.8 \left(1 - e^{-y^+/11} - \frac{y^+}{11} e^{-0.33 y^+} \right).$$

Für rauhe Wandoberflächen ist eine grobe Einteilung der Rauigkeiten in die zwei Klassen der regulären und der irregulären Oberflächenrauigkeiten möglich [Jay69].

In Abschnitt 5.1 wird die für $3.7 < y_r^+ < 100$ gültige und in [Jay69] angegebene Korrelation

$$E = 1/\sqrt{\alpha (y_r^+/\beta)^2 + (1-\alpha)E_M^{-2}} \quad \text{mit} \quad E_M = e^{5.5\kappa}, \quad \beta = 30, \quad (\text{A.13})$$

$$\alpha = 1 + 2X^3 - 3X^2 \quad \text{und} \quad X = 0.02248(100 - y_r^+)/y_r^{+0.584}$$

für gleichmäßige Sandkornrauigkeit verwendet.

Ist die Oberflächenrauigkeit regulär, so tritt neben der Länge ν/u_τ als weitere Länge eine „Rauigkeitslänge“ y_r auf. Die Geschwindigkeitswandfunktion hängt damit neben dem dimensionslosen Wandabstand auch vom Parameter $y_r^+ = y_r/(\nu/u_\tau)$ ab:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln E(y_r^+) y^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + \frac{1}{\kappa} \ln E(y_r^+) = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_r} + \frac{1}{\kappa} \ln E_r(y_r^+)$$

mit $E_r = y_r^+ E$.

Man kann dabei drei Bereiche unterscheiden [Rot72]:

- Die hydraulisch glatte Oberfläche ($0 \leq y_r^+ \leq 5$):
Impuls wird durch Scherspannungen auf die Wand übertragen. Ein Einfluß der Rauigkeit auf die mittlere Geschwindigkeit ist nicht feststellbar.
- Den Übergangsbereich ($5 < y_r^+ \leq 70$):
Impuls wird durch Scherspannungen und Druckkräfte auf die Wand übertragen. $E(y_r^+)$ beginnt abzunehmen.
- Die ausgebildete Rauigkeitsströmung ($y_r^+ > 70$):
Impuls wird überwiegend durch Druckkräfte auf die Wand übertragen. $E_r(y_r^+)$ wird zu einer Konstanten; es ist kein Einfluß der Viskosität auf die mittlere Geschwindigkeit mehr feststellbar.

Verläufe der Funktionen $E_r(y_r^+)$ und $E(y_r^+)$ für verschiedenste Rauigkeitstypen finden sich beispielsweise in [Jay69] und [Rot72].

Die Temperaturwandfunktion ist durch

$$T^+ = \text{Pr}_t (u^+ + E_T)$$

direkt mit der Geschwindigkeitswandfunktion und der turbulenten Prandtl-Zahl verknüpft [Jay69], [LS72].

Für glatte Wände liefert

$$E_T = 9.24 \left(\left(\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \right)^{3/4} - 1 \right) (1 + 0.28 e^{-0.007 \text{Pr}/\text{Pr}_t})$$

mit Experimenten im Einklang stehende Werte (siehe [Jay69, Abbildung 3.4]).

Für raue Wände hängt E_T wiederum von y_r^+ ab; in [Jay69] werden auch für E_T Verläufe für unterschiedliche Rauigkeitstypen angegeben. Die Streuung experimenteller und aus Korrelationen berechneter Werte für E_T ist für glatte und raue Wände recht stark. Problematisch bei der experimentellen Bestimmung ist vor allem die Wahl der Beheizung: Bei schwacher Beheizung ist der Einfluß der Dissipation nicht vernachlässigbar und bei starker Beheizung wird die Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte signifikant. In beiden Fällen existiert kein universelles Temperaturprofil.

A.4.5. Koeffizienten der low-Re k - ε -Modelle

Nach dem Übersichtsartikel von Patel, Rodi und Scheuerer [PRS85], in dem Turbulenzmodelle für den wandnahen Bereich ausführlich analysiert werden, ergeben sich in der Gruppe der low-Re k - ε -Modelle akzeptable Ergebnisse nur für die drei von Chien, von Lam und Bremhorst und von Launder und Sharma vorgeschlagenen Modelle. Die anderen Modelle scheitern schon an einfachen Testfällen.

In [MSHL91] werden die oben genannten Modelle und ein einfacher Ansatz von van Driest im Vergleich mit Daten aus einer direkten numerischen Simulation getestet. Die besten Ergebnisse lieferten dabei der Ansatz von van Driest und das von Lam und Bremhorst vorgeschlagene Modell.

Auch in [JD92] wird den Modellen von Lam und Bremhorst und von Launder und Sharma der beste Verlauf der Funktion f_μ bestätigt.

In Untersuchung mit einem von mir speziell dafür erstellten FEM-Programm wurde gezeigt, daß die beste Übereinstimmung mit experimentellen Daten mit dem von Lam und Bremhorst vorgeschlagenen Modell erzielt werden kann [Hil95]. Modifikationen an den Modellfunktionen und die Verwendung nichtlinearer Modelle führten dabei nicht zu sichtbaren Verbesserungen.

Die Modellfunktionen des low-Re k - ε -Modelles von Lam und Bremhorst [LB81] haben die Form

$$f_\mu = (1 - e^{-A_\mu \text{Re}_k})^2 \left(1 + \frac{A_t}{\text{Re}_t} \right), \quad f_1 = 1 + \left(\frac{A_{c1}}{f_\mu} \right)^3 \quad \text{und} \quad f_2 = 1 - e^{-\text{Re}_t^2} \quad (\text{A.14})$$

mit den Konstanten

$$A_\mu = 0.0165, \quad A_t = 20.5 \quad \text{und} \quad A_{c1} = 0.05$$

und den „lokalen Reynolds-Zahlen“

$$\text{Re}_k = \frac{\sqrt{\tilde{k}} y}{\tilde{\nu}} = \frac{\sqrt{k^+} y^+}{\nu^*} \quad \text{und} \quad \text{Re}_t = \frac{\tilde{k}^2}{\tilde{\nu} \tilde{\varepsilon}} = \frac{k^{+2}}{\nu^* \varepsilon^+}.$$

Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Modifikationen für raue Wände werden in [Rup97] ausführlich beschrieben. Die zusätzlichen Dämpfungsfunktionen f_r und f_T wurden bestimmt zu

$$\begin{aligned} f_r &= \begin{cases} 1.0 + c_r * (1.0 - y^+/y_r^+) & \text{für } y^+ < y_r^+ \\ 1.0 & \text{für } y^+ \geq y_r^+ \end{cases} \\ \text{und } f_T &= \begin{cases} 1.0 & \text{für } \text{Pr} \leq 2.22 \\ f_r & \text{für } \text{Pr} > 2.22 \end{cases} \\ \text{mit } c_r &= \begin{cases} 0.67 - 8.76 \cdot 10^{-3} y_r^+ & \text{für } y_r^+ \leq 21.22 \\ 0.37 + 5.19 \cdot 10^{-3} y_r^+ & \text{für } y_r^+ > 21.22 \end{cases} \end{aligned}$$

und der dimensionslosen Rauigkeitshöhe y_r^+ .

B. Anhang zum numerischen Verfahren

B.1. Die algebraischen Gleichungen für den wandnahen Bereich

Die durch die Gleichungen (A.9) bis (A.12) gegebenen Modellgleichungen für den wandnahen Bereich werden so linearisiert, daß sie die Form

$$\frac{d}{dy^+} \left(g(y^+) \frac{df}{dy^+} \right) + h(y^+) f + l(y^+) = 0 \quad (\text{B.1})$$

mit f aus $\{u^+, k^+, \varepsilon^+, T^+\}$ einnehmen. Die Funktionen g , h und l können dabei neben y^+ auch von den Feldvariablen abhängen, wobei die Werte für f der Lösung des vorhergehenden Iterationsschritts zu entnehmen sind.

Durch Multiplikation der Gleichung (B.1) mit der Ansatzfunktion ϕ_i , Verwendung des Ansatzes $f(y^+) = \sum_j \phi_j(y^+) f_j$ und Integration über das betrachtete kompakte Intervall I unter Anwendung partieller Integration erhält man die Galerkinschen finite Elemente Gleichungen

$$\sum_j \underbrace{\left(\int_I g \frac{d\phi_i}{dy^+} \frac{d\phi_j}{dy^+} dy^+ - \int_I h \phi_i \phi_j dy^+ \right)}_{A_{ij}} f_j = \underbrace{\int_I l \phi_i dy^+ + \left(\phi_i g \frac{df}{dy^+} \right) \Big|_{\partial I}}_{b_i}. \quad (\text{B.2})$$

Es entsteht also ein lineares Gleichungssystem der Form $\underline{A} \underline{f} = \underline{b}$ für die in der Ansatzfunktion auftretenden Werte f_j (bei linearen und quadratischen Ansätzen die Werte der Feldvariablen an den Netzknoten). An beiden Rändern müssen Randbedingungen vorgegeben werden. Es kann der Wert von f oder der Fluß $g df/dy^+$ vorgegeben werden. Cauchy-Bedingungen treten bei den hier betrachteten Strömungen nicht auf.

Die Diskretisierung der Modellgleichungen für den wandnahen Bereich führt auf lineare Gleichungssysteme, deren Koeffizienten mit Gleichung (B.2) durch die Funktionen $g(y^+)$, $h(y^+)$ und $l(y^+)$ bestimmt sind. Daher müssen zur eindeutigen Festlegung der Diskretisierung im folgenden nur diese Funktionen angegeben werden. Da alle zur Bildung der Funktionswerte erforderlichen Werte der Variablen der Lösung des vorangegangenen Iterationsschritts zu entnehmen sind, wird auf deren explizite Kennzeichnung im folgenden verzichtet.

Die algebraischen Gleichungen zur Bestimmung der dimensionslosen Geschwindigkeit werden nach Gleichung (A.9) gebildet mit

$$\begin{aligned} g &= f_r \rho^* \left(\frac{\nu_0}{\nu_1} \nu^* + \nu_t^+ \right), \\ h &= 0 \quad \text{und} \\ l &= -(\underline{e}_t)_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \frac{\nu_1}{\rho_0 u_\tau^3} + \rho^* \frac{\nu_1 \underline{g} \underline{e}_t}{u_\tau^3}. \end{aligned}$$

Die linearen Gleichungssysteme zur Bestimmung der dimensionslosen Turbulenzvariablen ergeben sich nach den Gleichungen (A.10) und (A.11) und den in Abschnitt 4.2.3 beschriebenen Umformungen für die Turbulenzintensität aus

$$\begin{aligned} g &= \rho^* \left(\frac{\nu_0}{\nu_1} \nu^* + \frac{\nu_t^+}{\sigma_k} \right), \\ h &= -2 \rho^* \varepsilon^+ / k^+ \quad \text{und} \\ l &= \rho^* \nu_t^+ f_r^2 \left(\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)^2 + \rho^* \varepsilon^+ \end{aligned}$$

und für die turbulente Dissipation aus

$$\begin{aligned} g &= \rho^* \left(\frac{\nu_0}{\nu_1} \nu^* + \frac{\nu_t^+}{\sigma_\varepsilon} \right), \\ h &= -2 c_{\varepsilon 2} f_2 \rho^* \frac{\varepsilon^+}{k^+} \quad \text{und} \\ l &= c_{\varepsilon 1} f_1 \rho^* \nu_t^+ \frac{\varepsilon^+}{k^+} \left(\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)^2 + c_{\varepsilon 2} f_2 \rho^* \frac{\varepsilon^{+2}}{k^+}. \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem zur Berechnung der dimensionslosen Temperatur, die durch die Differentialgleichung (A.12) bestimmt ist, wird gebildet mit den Funktionen

$$\begin{aligned} g &= f_T \frac{c_{p0}}{c_{p1}} \frac{\dot{q}_w}{\rho_1 u_\tau^3} \left(\lambda^* \frac{1}{\text{Pr}_0} \frac{\nu_0}{\nu_1} + \rho^* c_p^* \frac{\nu_t^+}{\text{Pr}_t} \left(1 - f_\mu c_{nl} \left(\frac{k^+}{\varepsilon^+} \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)^2 \right) \right), \\ h &= -u^+ \beta^* \beta_0 \Delta T (\underline{e}_t)_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \frac{\nu_1}{\rho_0 u_\tau^3} \quad \text{und} \\ l &= u^+ \beta^* \beta_0 T_w t_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \frac{\nu_1}{\rho_0 u_\tau^3} + \frac{\nu_0}{\nu_1} \rho^* \nu^* f_r^2 \left(\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)^2 + \rho^* \varepsilon^+ \\ &\quad + \frac{\nu_t^+}{\text{Pr}_t} f_T \left(1 - f_\mu c_{nl} \left(\frac{k^+}{\varepsilon^+} \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)^2 \right) \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \rho^* \frac{\partial c_p^*}{\partial y^+} \frac{c_{p0}}{c_{p1}} \frac{\dot{q}_w}{\rho_1 u_\tau^3}. \end{aligned}$$

B.2. Die algebraischen Gleichungen für den Kernbereich

Im folgenden sind die Berechnungsvorschriften für die Koeffizientenmatrizen und Konstantenvektoren aufgeführt, die sich durch die Diskretisierung der thermofluidodynamischen Gleichungen für den Kernbereich ergeben.

Durch elementweises Konstantsetzen einzelner Terme der Erhaltungsgleichungen kann das numerische Verfahren auf Kosten der Genauigkeit stabil gehalten werden. Ein effizientes numerisches Verfahren verwendet idealerweise zu Beginn solche stabilitätsverbessernden Diskretisierungen und geht im Verlauf der Berechnung zu genaueren Diskretisierungen über (siehe auch Abschnitt 4.2). Unterschiedliche Diskretisierungen, die durch elementweises Konstantsetzen einzelner Terme gewonnen werden können, sind im folgenden nicht explizit aufgeschrieben, da lediglich die elementweise gemittelten Terme vor die entsprechenden Elementintegrale zu ziehen sind.

Es werden zuerst die Diskretisierungen der Terme getrennt nach den physikalischen Prozessen, die sie repräsentieren, beschrieben. Da die resultierenden algebraischen Gleichungen am effizientesten gelöst werden können wenn sie linear sind, werden anschließend die dazu notwendigen Linearisierungen der einzelnen Bilanzgleichungen diskutiert. Wie bei der Simulation des wandnahen Bereichs kommt der Linearisierung auch im dreidimensionalen Fall eine zentrale Bedeutung für die Effizienz des gesamten Verfahrens zu.

Diskretisierung der konvektiven Terme

Die Konvektionsterme der Größe f^* , die bei Einbeziehung der Zeitableitung oft auch als Advektionsterme bezeichnet werden, lassen sich in folgende allgemeine Form bringen:

$$\frac{1}{\text{Sl}} \rho^* \frac{\partial f^*}{\partial t^*} + \rho^* v_k^* \frac{\partial f^*}{\partial x_k^*} = \frac{1}{\text{Sl}} \frac{\partial \rho^* f^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x_k^*} (\rho^* v_k^* f^*) . \quad (\text{B.3})$$

Die Diskretisierung der Konvektionsterme kann auf unterschiedliche Weise erfolgen. Nach

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Sl}} \int_G \phi_i \rho^* \frac{\partial f^*}{\partial t^*} dV + \int_G \phi_i \rho^* v_k^* \frac{\partial f^*}{\partial x_k^*} dV = \\ \frac{1}{\text{Sl}} \int_G \phi_i \rho^* \frac{\partial f^*}{\partial t^*} dV + \frac{1}{\text{Sl}} \int_G \phi_i f^* \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} dV - \int_G \rho^* v_k^* f^* \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k^*} dV + \oint_\Gamma \phi_i \rho^* v_n^* f^* dF \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

kann der Konvektionsterm einerseits in der links stehenden Form diskretisiert werden, da er keine zweite Ableitung enthält, andererseits kann er durch partielle Integration (siehe [BS79], [Spe99]) unter Verwendung der Gleichung (B.3) in die rechts stehende Form überführt werden.

Die in der rechten Form zusätzlich auftretenden Randintegrale führen nur für $v_n^* \neq 0$ zu zusätzlich zu stellenden Randbedingungen (anstelle des diffusiven Flusses ist die Summe aus

konvektivem und diffusivem Fluß vorzugeben). Da die Normalenkomponente der mittleren Geschwindigkeit an Wänden und Symmetrieflächen verschwindet und am Eintritt Dirichlet-Randbedingungen für die transportierten Größen vorgegeben werden, führen die zusätzlichen Terme nur an Auslaßrändern zu scheinbar zusätzlich zu stellenden Randbedingungen. Weil zur Berechnung des rein konvektiven Transports an den Ausflußrändern keine Randbedingungen vorgegeben werden müssen, der konvektive Fluß an den Auslaßrändern sich also durch die Berechnung selbst ergibt, kann er auch in dieser Arbeit beispielsweise der Lösung des vorhergehenden Iterationsschritts entnommen werden und führt nicht zu zusätzlich oder in anderer Form vorzugebenden Randbedingungen. Die Vorgabe des Gesamtflusses der transportierten Größe oder des rein diffusiven Flusses ist somit äquivalent. Bei (partieller) Parabolisierung des Differentialgleichungssystems ist die linke Form am günstigsten, da nur diffusive Ströme explizit vorgegeben werden müssen, die bei geeigneter Parabolisierungsrichtung normal zu Auslaßrändern gerade verschwinden.

Weder die rechte noch die linke Form der Diskretisierung nach Gleichung (B.4) führen zu symmetrischen linearen Gleichungssystemen. Da unsymmetrische Systeme zumindest bei iterativer Lösung mehr Speicherplatz und pro Iteration mehr Rechenzeit benötigen als symmetrische Systeme gleicher Konditionszahl [Hac91, § 9.5.9], ist unter der Bedingung, daß dadurch die Konditionszahl des Systems nicht verschlechtert wird, eine Diskretisierung wünschenswert, die auf symmetrische Systeme führt. Auch durch Wahl einer Mischung aus den beiden angegebenen Diskretisierungen läßt sich ein symmetrisches System bei der Diskretisierung der Transportgleichungen nicht erreichen. Der Laplaceoperator führt bei der Diskretisierung nach der Galerkinschen finite Elemente Methode immer auf symmetrische Gleichungssysteme. Das im partiell parabolischen Fall größte Gleichungssystem – das Gleichungssystem zur Bestimmung des Drucks – ist, da die Druckpoissongleichung auf der rechten Seite den Druck nicht explizit enthält, deshalb symmetrisch.

Der nichtlineare Konvektionsterm führt bei gegenüber der Diffusion starker Konvektion und nicht extrem feinem Netz zur Instabilität der oben beschriebenen Diskretisierungen der Impulsbilanz. Stabile Verfahren ergeben sich in der Regel erst durch Verwendung von Aufwind-diskretisierungen, die aber auch zur Lösungsverfälschung führen (siehe Abschnitt 4.1.3). Das hier gewählte Verfahren der schrittweisen Lösung ermöglicht nicht nur die effiziente Lösung der dreidimensionalen Gleichungen, sondern verhindert gleichzeitig eine phänomenologisch unsinnige stromaufwärtsgerichtete Kopplung in den Impulsbilanzkomponentengleichungen und führt damit auch bei starker Konvektion zu Stabilität *ohne* Zuhilfenahme einer die Konsistenz zerstörenden Modifikation der Diskretisierung.

Diskretisierung der diffusiven Terme

Die diffusiven Terme entstehen in den Transportgleichungen durch die Divergenzbildung des Flusses, der entweder proportional zum Gradienten der Feldgröße ist oder einen zum Gradienten der Feldgröße proportionalen Anteil besitzt. Alle diffusiven Terme lassen sich somit in die allgemeine Form

$$\frac{\partial}{\partial x_k^*} q_k^* = \frac{\partial}{\partial x_k^*} \left(g_k^* + h_{kl}^* \frac{\partial f^*}{\partial x_l^*} \right) \quad (\text{B.5})$$

mit dem Transportkoeffizienten h^* , der ein Tensor zweiter Stufe oder ein Skalar sein kann, bringen.

Die Diskretisierung des allgemeinen diffusiven Terms führt, wie es nach der Analyse der Gleichungscharakteristik zu erwarten ist, auf Randintegrale. Da der Fluß der entsprechenden Feldgröße durch die Oberfläche vorzugeben ist, muß auch der nicht zum Gradienten der Feldvariablen proportionale Term so diskretisiert werden, daß ein entsprechendes Oberflächenintegral gebildet wird. Damit führt die Diskretisierung des allgemeinen diffusiven Terms aus Gleichung (B.5) mittels partieller Integration immer auf Integrale der Form

$$\int_G \phi_i \frac{\partial}{\partial x_k^*} \left(g_k^* + h_{kl}^* \frac{\partial f^*}{\partial x_l^*} \right) dV = - \int_G \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k^*} \left(g_k^* + h_{kl}^* \frac{\partial f^*}{\partial x_l^*} \right) dV + \oint_\Gamma \phi_i q_n^* dF. \quad (\text{B.6})$$

Die durch die diffusiven Terme bedingte Notwendigkeit der Vorgabe von Randbedingungen an allen Rändern steht im Einklang mit der Gleichungssystemcharakteristik. Bei Parabolisierung und Auslaßrändern, die senkrecht zur Parabolisierungsrichtung liegen, verschwindet der diffusive Fluß q_n^* ; es treten also, wie durch die Analyse der Charakteristik gefordert, keine Randintegrale auf.

Diskretisierung des Druckterms in der Impulsbilanz

Die dimensionslose Impulsbilanz (3.22) geht mit den symmetrischen Tensoren

$$\left(\underline{\underline{\sigma}}_{is}^* \right)_{ij} = -\text{Eu } p_{\text{eff}}^* \delta_{ij} \quad (\text{B.7})$$

$$\left(\underline{\underline{\sigma}}_k^* \right)_{ij} = -\rho^* v_i^* v_j^* \quad (\text{B.8})$$

$$\left(\underline{\underline{\sigma}}_d^* \right)_{ij} = \frac{1}{\text{Re}} \rho^* \nu^* \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_l^*}{\partial x_l^*} \right) + \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \rho^* \left(-\widetilde{v_i'' v_j''}^* + \frac{2}{3} \delta_{ij} k^* \right) \quad (\text{B.9})$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\sigma}}_k^* + \underline{\underline{\sigma}}_d^* + \underline{\underline{\sigma}}_{is}^* \quad (\text{B.10})$$

über in die Form $\frac{1}{\text{Si}} \frac{\partial \rho^* v^*}{\partial t^*} = \text{div}^* \underline{\underline{\sigma}}^* + \frac{1}{\text{Fr}} \rho^* \underline{\underline{g}}^*$.

Neben den zwei Möglichkeiten zur Diskretisierung des Konvektionsterms gibt es bei der Impulsbilanzgleichung auch zwei Möglichkeiten, den isotropen Druckanteil $\underline{\underline{\sigma}}_{is}^*$ zu diskretisieren. Wie der Konvektionsterm kann er partiell integriert werden; da er keine zweite Ableitung in die integrale Formulierung einbringt, besteht dazu jedoch keine Notwendigkeit.

$$-\text{Eu} \int_G \phi_i \frac{\partial p_{\text{eff}}^*}{\partial x_j^*} dV = \text{Eu} \int_G p_{\text{eff}}^* \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j^*} dV - \text{Eu} \oint_\Gamma \phi_i p_{\text{eff}}^* n_j dF \quad (\text{B.11})$$

Es ergeben sich wie beim konvektiven Term unterschiedliche Randbedingungen nur für den Auslaßrand. Am Einlaßrand werden Dirichletbedingungen vorgegeben und an Wänden und

Symmetrieebenen wird anstelle des oben angegebenen Oberflächenintegrals die Geschwindigkeit in Normalenrichtung zu Null vorgegeben. Auch ändert sich die an den Rändern vorzugebende Information für das Gesamtsystem nicht durch die Wahl unterschiedlicher Diskretisierungen, da das Druckfeld am Auslaßrand ohnehin zur Bestimmung des Druckfelds vorgegeben werden muß. Bei den durchgeführten Simulationen war zwischen den Diskretisierungen kein Unterschied festzustellen. Es wird immer die Diskretisierung gewählt, bei der ausschließlich die Spannungen in den Randintegralen auftreten.

Da Gleichungen für die Komponenten der Impulsbilanz gelöst werden, kann die Dirichletbedingung einer verschwindenden Normalenkomponente der Geschwindigkeit in der Regel nicht direkt vorgegeben werden (siehe Abschnitte 2.1.3 und 3.2.1). Die zwei vorzugebenden Komponenten des Spannungstensors unterscheiden sich aber je nachdem, ob ein spurloser oder ein spurbehafteter Spannungstensor, entsprechend den zwei Diskretisierungsmöglichkeiten des Druckterms, verwendet wird. Dadurch werden die an das Gesamtproblem vorzugebenden Randbedingungen nicht beeinflußt, wohl aber das Vorgehen zur numerischen Implementierung der Randbedingungen.

Diskretisierung der Quellterme

Die Quellterme werden hier sämtlich in die Form $g^* + h^* f^*$ mit einem von der Feldvariablen unabhängigen und einen zur Feldvariablen proportionalen Anteil gebracht. Die Linearisierungen, die notwendig sind, um die Differentialgleichungen in diese Form zu bringen, werden weiter unten behandelt.

Die Diskretisierung der Quellterme ist, nachdem sie in die oben angegebene Form gebracht sind, eindeutig:

$$\int_G \phi_i (g^* + h^* f^*) dV = \int_G \phi_i g^* dV + \int_G \phi_i h^* f^* dV. \quad (\text{B.12})$$

In der Energiebilanz treten außer den oben angegebenen Termen zum Gradienten der Feldvariablen proportionale Quellterme auf, die allerdings sehr klein sind im Vergleich zu den dominanten Quellen in der Energiebilanz, der viskosen und der turbulenten Dissipation. Sie können daher unter Verwendung der entsprechenden Größen aus der Lösung des vorhergehenden Iterationsschritts in die oben gegebene Form gebracht werden, ohne daß die Effizienz der Lösungsberechnungsverfahren negativ beeinflußt wird (siehe auch Abschnitt 4.2.3).

Linearisierung der Gleichungen

Werden zur Linearisierung Werte aus der vorhergehenden Iteration verwendet, so wird die entsprechende Variable beispielsweise mit \tilde{v}_j^* anstelle v_j^* gekennzeichnet. Da die Lösung der Gleichungen für jede Feldgröße getrennt erfolgt, werden im folgenden nur die Nichtlinearitäten in der betrachteten Größe behandelt, die durch die jeweilige Gleichung bestimmt wird.

Die konvektiven Terme führen nur in der Impulsbilanz auf Nichtlinearitäten. Der in $\underline{\underline{\sigma_k}}$ enthaltene Konvektionsterm kann linearisiert werden, indem vom dyadischen Produkt

$$v_i^* v_j^* = v_i^* \check{v}_j^* + \check{v}_i^* v_j^* - \check{v}_i^* \check{v}_j^* + (v_i^* - \check{v}_i^*)(v_j^* - \check{v}_j^*)$$

der letzte Term vernachlässigt wird [Seg85], was einer Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung von $v_i^* v_j^*$ um $(\check{v}_i^*, \check{v}_j^*)$ entspricht. Bei konvergierender Lösung strebt der vernachlässigte Term dann offensichtlich gegen Null.

Tritt anstelle des dyadischen Produkts das in der Geschwindigkeit nichtlineare Produkt $v_i^* \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*}$ in der diskretisierten Impulsbilanz auf, so läßt es sich analog durch Vernachlässigung des letzten Terms in

$$v_i^* \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} = v_i^* \frac{\partial \check{v}_j^*}{\partial x_i^*} + \check{v}_i^* \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} - \check{v}_i^* \frac{\partial \check{v}_j^*}{\partial x_i^*} + (v_i^* - \check{v}_i^*) \frac{\partial (v_j^* - \check{v}_j^*)}{\partial x_i^*}$$

linearisieren.

Weitere nichtlineare Terme treten in den Komponenten der Impulsbilanz bei nichtlinearer Modellierung der Reynoldsschen Spannungen auf. Ihre Linearisierung kann durch Entnehmen aller Geschwindigkeitswerte aus der Lösung des vorhergehenden Iterationsschritts oder analog zur Linearisierung des Konvektionsterms durch Vernachlässigung des letzten Terms in

$$\frac{\partial v_i^*}{\partial x_\nu^*} \frac{\partial v_j^*}{\partial x_\mu^*} = \frac{\partial v_i^*}{\partial x_\nu^*} \frac{\partial \check{v}_j^*}{\partial x_\mu^*} + \frac{\partial \check{v}_i^*}{\partial x_\nu^*} \frac{\partial v_j^*}{\partial x_\mu^*} - \frac{\partial \check{v}_i^*}{\partial x_\nu^*} \frac{\partial \check{v}_j^*}{\partial x_\mu^*} + \frac{\partial (v_i^* - \check{v}_i^*)}{\partial x_\nu^*} \frac{\partial (v_j^* - \check{v}_j^*)}{\partial x_\mu^*}$$

erfolgen.

Die bei getrennter Betrachtung der drei Komponenten der Impulsbilanz notwendigen Linearisierungen ergeben sich aus den oben aufgeführten Linearisierungen als Spezialfall (im folgenden ist die Summationskonvention nicht anzuwenden):

$$\begin{aligned} v_i^{*2} &\approx 2 v_i^* \check{v}_i^* - \check{v}_i^* \check{v}_i^*, \\ v_i^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i^*} &\approx v_i^* \frac{\partial \check{v}_i^*}{\partial x_i^*} + \check{v}_i^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i^*} - \check{v}_i^* \frac{\partial \check{v}_i^*}{\partial x_i^*}, \\ \frac{\partial v_i^*}{\partial x_\nu^*} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_\mu^*} &\approx \frac{\partial v_i^*}{\partial x_\nu^*} \frac{\partial \check{v}_i^*}{\partial x_\mu^*} + \frac{\partial \check{v}_i^*}{\partial x_\nu^*} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_\mu^*} - \frac{\partial \check{v}_i^*}{\partial x_\nu^*} \frac{\partial \check{v}_i^*}{\partial x_\mu^*}. \end{aligned}$$

Allen beschriebenen Linearisierungen ist gemein, daß sie die Konsistenz des Verfahrens nicht beeinflussen und zu keiner Lösungsverfälschung durch künstliche Diffusion führen, wie sie beispielsweise bei einfachen Aufwind-Verfahren entsteht.

Die Druckpoissonsgleichung (3.11) enthält den Druck explizit nur auf der linken Seite und läßt sich damit problemlos und ohne die Notwendigkeit, Terme zu linearisieren, in ihre schwache Form überführen. Der Druck ist nur implizit in den Stoffwerten und deren Ableitungen auf der rechten Seite enthalten. Die Druckabhängigkeit der Stoffwerte ist bei elementweiser Betrachtung gering, wird aber durch die Abhängigkeit vom Druckfeld des vorherigen Iterationsschritts berücksichtigt.

Die Gleichungen für die Turbulenzenergie und die Dissipation von Turbulenzenergie enthalten ausgeprägt nichtlineare Quellterme, die bei ungünstiger Behandlung zu physikalisch unsinnigen Lösungen und zur Instabilität des gesamten Verfahrens führen können [HSH87], [Sch90]. Im dreidimensionalen Fall wird auf die bei der Simulation des wandnahen Bereichs gewonnenen Erfahrungen zurückgegriffen; die Quellterme werden wie in Abschnitt 4.2.3 beschrieben diskretisiert, um physikalisch sinnlose Lösungen zu vermeiden und die Lösbarkeit der resultierenden linearen Gleichungssysteme zu verbessern, ohne die Konsistenz des Verfahrens zu beeinflussen.

Weitere Nichtlinearitäten treten dadurch auf, daß die Koeffizienten in den Diffusionstermen von den Turbulenzfeldgrößen abhängig sind. Sie werden, wie bei der Simulation des wandnahen Bereichs, durch Entnahme der Feldvariablen aus der Lösung des vorhergehenden Iterationsschritts beseitigt.

Die Energiebilanzgleichung enthält in der Temperaturform die Temperatur explizit linear. Bei realen Fluiden sind zwar die Stoffwerte Funktionen der Temperatur, die Lösung bereitet aber in der Regel trotzdem keine Schwierigkeit, wenn das Temperaturfeld des vorhergehenden Iterationsschrittes der Berechnung der Materialwerte zugrunde gelegt wird.

Die zum Temperaturgradienten proportionalen Quellterme können ohne Effizienzeinbuße bei der Gleichungslösung der Lösung des vorhergehenden Iterationsschritts entnommen werden, um einen einfacheren und schnelleren Gleichungssystemaufbau zu ermöglichen (siehe oben).

Ähnlich wie Gleichung (B.2) bei der Formulierung der finite Elemente-Gleichungen für den wandnahen Bereich läßt sich auch für den Kernbereich eine für alle Transportgleichungen gültige Formulierung der diskretisierten Gleichungen finden. Unter Verwendung des Ansatzes $f^* = \sum_j f_j^* \phi_j(\underline{x}^*)$ ergibt sich für die Diskretisierung die allgemeine Form

$$\sum_j \underbrace{\left(\int_G g_{\nu\mu}^K \frac{\partial \phi_i}{\partial x_\nu^*} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_\mu^*} dV + \int_G g_\nu^{K'} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x_\nu^*} dV + \int_G g_\nu^{K''} \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial x_\nu^*} dV + \int_G g^M \phi_i \phi_j dV \right)}_{A_{ij}} f_j^* = \underbrace{\left(\int_G h \phi_i dV + \int_G h'_\nu \frac{\partial \phi_i}{\partial x_\nu^*} dV + \oint_\Gamma \phi_i q_n^{*,d} dF + \oint_\Gamma \phi_i \rho^* v_n^* f^* dF \right)}_{b_i} \quad (\text{B.13})$$

Zur Bestimmung der Koeffizientenmatrizen und Konstantenvektoren der Gleichungssysteme sind somit nur noch die Funktionen und Flüsse in den in Gleichung (B.13) auftretenden Integralen zu spezifizieren, wobei das Oberflächenintegral über die konvektiven Flüsse nicht auftreten muß und die diffusiven Flüsse auf den Ausflußrändern bei Parabolisierung verschwinden (siehe Abschnitt 3.2).

Bei Poissongleichungen der Form $\Delta \Phi = f$, wie beispielsweise der Druckgleichung, treten bei der Galerkinschen finite Elemente-Methode im System linearer algebraischer Gleichungen zur Bestimmung der f_i nur zwei, bei den linearisierten thermofluidodynamischen Gleichungen mit skalaren Transportkoeffizienten unter elementweisem Konstantsetzen vieler Terme nur drei

Matrizen auf, die daher eigene Bezeichnungen erhalten haben. Dieses sind die Massenmatrix $\underline{\underline{M}}$, die Steifigkeitsmatrizen $\underline{\underline{K}}$ und die Matrizen $\underline{\underline{K}}'_{ij}$, die ebenfalls als Steifigkeitsmatrizen bezeichnet werden und als einzige der Matrizen nicht symmetrisch sind:

$$M_{ij} = \int \phi_i \phi_j dV, \quad K_{ij} = \int \text{grad } \phi_i \cdot \text{grad } \phi_j dV, \quad \underline{\underline{K}}'_{ij} = \int \phi_i \text{grad } \phi_j dV. \quad (\text{B.14})$$

Für konstantes und zur Einheitsmatrix proportionales $\underline{\underline{g}}^K$ ist das erste Integral in Gleichung (B.13) proportional zur Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{K}}$. Das zweite und das dritte Integral sind für konstantes $\underline{\underline{g}}^{K'}$ und $\underline{\underline{g}}^{K'^t}$ proportional zur Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{K}}'_{ij}$ und ihrer Transponierten. Ist der Koeffizient $\underline{\underline{g}}^M$ konstant, so ist das vierte Integral proportional zur Massenmatrix. Für isotrope Diffusionsansätze und elementweise konstante Funktionen g läßt sich die Elementmatrix damit aus den Steifigkeitsmatrizen und der Massenmatrix des Elements zusammensetzen.

Beim elementweisen Aufbau der Matrix erfolgt keine explizite Transformation der Integranden in das Koordinatensystem des Einheitselements, sondern es werden alle Feldgrößen, deren partielle Ableitungen und die partiellen Ableitungen der Ansatzfunktionen an den Stützstellen der numerischen Integration berechnet und die Integrale durch eine gewichtete Summe der Werte der Integranden, multipliziert mit der Jacobideterminante der Transformation, approximiert.

Wie im vorhergehenden Abschnitt sind alle zur Bildung der Integrale erforderlichen Werte der Variablen der Lösung des vorangegangenen Iterationsschritts zu entnehmen; auf ihre explizite Kennzeichnung wird daher verzichtet. Vereinfachungen dieser Gleichungen wie das elementweise Konstantsetzen von in den Integralen auftretenden Termen sind aufgrund der Vielzahl der dann aufzulistenden Integrale sowie ihrer einfachen Ableitung aus den im folgenden gegebenen allgemeinen Formulierungen nicht aufgeführt.

B.2.1. Bestimmung des Geschwindigkeitsfelds

Die Impulsbilanz wird komponentenweise gelöst. Im folgenden wird die Gleichung zur Bestimmung der Knotenwerte der Geschwindigkeitskomponente l angegeben, wobei nicht über den Index l summiert werden darf, auch wenn er mehrfach auftritt.

Wird der konvektive Term, wie in Gleichung (B.4) links stehend, diskretisiert, so ergibt sich mit der oben beschriebenen Linearisierung $g^{K'}_{\nu} = \rho^* v_{\nu}^*$, $g^M = \rho^* \partial v_l^* / \partial x_l^*$ und $h = \rho^* v_l^* \partial v_l^* / \partial x_l^*$. Diffusionsdominierte Strömungen erlauben die implizite Diskretisierung des Konvektionsterms mit $g^{K'}_{\nu} = g^{K'^t}_{\nu} = g^M = 0$ und $h = -\rho^* v_{\nu}^* \partial v_l^* / \partial x_{\nu}^*$. Beide Diskretisierungen des konvektiven Terms führen nicht zu Oberflächenintegralen.

Bei Wahl der in Gleichung (B.4) rechts stehenden Diskretisierung des konvektiven Terms ist $g^{K'^t}_{\nu} = -\rho^* v_{\nu}^* (1 + \delta_{\nu l})$ und $h'_{\nu} = -\rho^* v_l^* v_l^* \delta_{\nu l}$ und es tritt im Oberflächenintegral der konvektive Fluß $-\rho^* v_l^* v_n^* = \left(\underline{\underline{\sigma}}^*_{\underline{\underline{k}}} \right)_{l\nu} n_{\nu}$ auf, der der Lösung des vorhergehenden Iterationsschritts entnommen wird.

Der durch Gleichung (B.9) gegebene Tensor $\underline{\underline{\sigma_d^*}}$ ist nach erfolgter Linearisierung und Substituierung von v_l^* durch $v_l^{*(j)}\phi_j$ in eine Summe der Form

$$\sigma_{lk}^* = \sigma_{lk}^{*,(0)} + \sigma_{lk}^{*,(m)} v_l^{*(j)} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_m^*}$$

so zu zerlegen, daß alle Komponenten von $\sigma_{lk}^{*,(0)}$ und $\sigma_{lk}^{*,(m)}$ unabhängig von ϕ_j sind.

Es ist beispielsweise

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_l^*}{\partial x_k^*} + \frac{\partial v_k^*}{\partial x_l^*} - \frac{2}{3} \delta_{kl} \frac{\partial v_s^*}{\partial x_s^*} = & \left\{ \frac{\partial v_k^*}{\partial x_l^*} (1 - \delta_{kl}) - \frac{2}{3} \delta_{kl} (1 - \delta_{ls}) \frac{\partial v_s^*}{\partial x_s^*} \right\} \\ & + \left\{ \delta_{km} \left(1 + \frac{1}{3} \delta_{lm} \right) \right\} v_l^{*(j)} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_m^*}. \end{aligned}$$

Für die nichtlinearen Terme der expliziten algebraischen Turbulenzmodelle sind verschiedene Aufteilungen möglich. Die Matrizen der linearen Gleichungssysteme – und damit deren Konditionszahlen – bleiben gegenüber der Verwendung des Boussinesqansatzes unverändert, falls die nichtlinearen Terme implizit diskretisiert werden.

Eine Transformation des Gesamttensors, wie sie zur lokalen Parabolisierung notwendig ist, kann durch eine entsprechende Umformung der Ausdrücke $\sigma_{lk}^{(0)}$ und $\sigma_{lk}^{(m)}$ äquivalent ersetzt werden.

Vereinfachungen der Ausdrücke lassen sich dadurch erreichen, daß die Geschwindigkeitskomponente v_l^* der Lösung des vorhergehenden Iterationsschritts entnommen wird. Diese Vereinfachungen müssen allerdings mit Vorsicht verwendet werden, da die Konvergenzgeschwindigkeit dadurch verringert wird.

Der diffusive Anteil in den Impulsbilanzkomponentengleichungen führt bei der Komponente l damit zu $g_{\nu\mu}^K = \sigma_{l\nu}^{*,(\mu)}$ und $h'_\nu = -\sigma_{l\nu}^{*,(0)}$ und in den Oberflächenintegralen tritt die auf $\rho_0 v_0^2$ normierte Komponente l der Normalen des spurfreien Spannungstensors $\underline{\underline{\sigma_d}}$ auf.

Der Druck kann nach Gleichung (B.11) ebenfalls auf zwei verschiedene Arten diskretisiert werden. Die links stehende Form führt zu $h = -\text{Eu } \partial p_{\text{eff}}^* / \partial x_l^*$ und die rechts stehende Form zu $h'_\nu = \text{Eu } p_{\text{eff}}^* \delta_{\nu l}$, wobei die rechts stehende Form die Vorgabe der dimensionslosen Normal Komponente des spurbehafteten Spannungstensors anstelle des spurfreien Spannungstensors erfordert ($\underline{\underline{\sigma_d^*}} + \underline{\underline{\sigma_{is}^*}}$ statt $\underline{\underline{\sigma_d^*}}$).

Die Diskretisierung des Quellterms ist mit $h = \frac{1}{\text{Fr}} \rho^* g_l^*$ eindeutig.

B.2.2. Bestimmung des Druckfelds

Da die partielle Differentialgleichung zur Bestimmung des effektiven Drucks elliptischen Charakter hat, sie sich also nicht schrittweise lösen läßt, sind die resultierenden linearen Gleichungssysteme zur Bestimmung der Druckknotenwerte deutlich größer als die Gleichungssysteme zur Bestimmung der übrigen Feldgrößen.

Die Matrix des linearen Gleichungssystems ist wegen $g_{\nu\mu}^K = \delta_{\nu\mu}$ und $g_\nu^{K'} = g_\nu^{K'^t} = g^M = 0$ als einzige Matrix der linearen Gleichungssysteme symmetrisch, wodurch sich der Lösungsaufwand und der Speicherplatzbedarf gegenüber asymmetrischen Systemen gleicher Dimension reduziert.

Nach Gleichung (3.30) ist $h = 0$, $f^\star = 0$,

$$h'_\nu = \frac{1}{\text{Eu}} \left\{ -\rho^\star v_k^\star \frac{\partial v_\nu^\star}{\partial x_k^\star} + \frac{1}{\text{Fr}} g_\nu^\star \rho^\star + \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{\partial}{\partial x_k^\star} \left(-\rho^\star \widetilde{v_\nu'' v_k''}^\star + \frac{2}{3} \delta_{k\nu} \rho^\star k^\star \right) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_k^\star} \left(\rho^\star \nu^\star \left(\frac{\partial v_\nu^\star}{\partial x_k^\star} + \frac{\partial v_k^\star}{\partial x_\nu^\star} - \frac{2}{3} \delta_{k\nu} \frac{\partial v_m^\star}{\partial x_m^\star} \right) \right) \right\}.$$

und $q_\nu^{\star,d} = \partial p_{\text{eff}}^\star / \partial x_\nu^\star - h'_\nu = 0$ wegen Gleichung (3.22). An die Druckgleichung sind somit keine Neumann-Randbedingungen zu stellen.

Wird die modifizierte Poissongleichung mit der in Abschnitt 3.3 beschriebenen Korrektur mit einem negativen, mit γ^\star bezeichneten Korrekturfaktor zur Druckbestimmung verwendet, erfolgt die Berechnung des Konstantenvektors mit $h = 0$, $f^\star = 0$ und

$$h'_\nu = \frac{1}{\text{Eu}} \left\{ -\rho^\star v_k^\star \frac{\partial v_\nu^\star}{\partial x_k^\star} + \frac{1}{\text{Fr}} g_\nu^\star \rho^\star + \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{\partial \rho^\star}{\partial x_k^\star} \left(-\widetilde{v_\nu'' v_k''}^\star + \frac{2}{3} \delta_{k\nu} k^\star \right) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \rho^\star \nu^\star}{\partial x_k^\star} \left(\frac{\partial v_\nu^\star}{\partial x_k^\star} + \frac{\partial v_k^\star}{\partial x_\nu^\star} - \frac{2}{3} \delta_{k\nu} \frac{\partial v_m^\star}{\partial x_m^\star} \right) + \gamma^\star \rho^\star v_\nu^\star \right\}.$$

An den Rändern ist die Normalenkomponente von $q_\nu^{\star,d} = \partial p_{\text{eff}}^\star / \partial x_\nu^\star - h'_\nu$ vorzugeben.

Auf den Ausflußrändern werden Dirichlet-Randbedingungen vorgegeben, q_n^d muß also nicht bekannt sein. Auf Symmetrieflächen verschwindet \dot{q}_n^d immer und zur Wand hin gilt für $\gamma^\star = 0$ $\dot{q}_n^d \approx \partial p_{\text{eff}} / \partial n - \rho g_n \approx -\rho g_n$. Genauer und in dieser Arbeit verwendet ist die Bestimmung der Randbedingungen aus der Lösung des vorhergehenden Iterationsschritts. An den Einlaßrändern ist die Randbedingung für die Druckgleichung am schwierigsten zu beschaffen. Sie wird in dieser Arbeit immer der Lösung des vorhergehenden Iterationsschritts entnommen.

Es könnte auch der (geschätzte) effektive Druckverlust am Eintritt vorgegeben und die Randbedingung damit nach $\dot{q}_n^d \approx \partial(p + 2\rho k/3 + \rho \underline{v}^2/2)/\partial n - \rho g_n$ (für $\gamma^\star = 0$) berechnet werden. Ist die Strömung am Eintritt des zu berechnenden Bereichs isotherm, gilt die Berechnungsvorschrift für \dot{q}_n^d exakt. Am Eintritt ist das Druckfeld, insbesondere bei Vorgabe eines gleichförmigen Geschwindigkeitsprofils am Eintritt, stark inhomogen, die Verteilung des Druckverlustes unbekannt und diese Möglichkeit der Randbedingungsvorgabe nicht praktikabel.

B.2.3. Bestimmung der Turbulenzenergie und ihrer Dissipation

Die Diskretisierung des konvektiven Terms der Differentialgleichungen zur Bestimmung der Turbulenzenergie und ihrer Dissipation kann wieder auf zwei Arten erfolgen. Für $g_\nu^{K'} = \rho^\star v_\nu^\star$

und $g_\nu^{K't} = 0$ tritt kein konvektiver Anteil in den Oberflächenintegralen auf und für $g_\nu^{K'} = 0$ und $g_\nu^{K't} = -\rho^* v_\nu^*$ ist der konvektive Fluß der betrachteten Größen an den Rändern des Berechnungsgebiets der Lösung des vorhergehenden Iterationsschritt zu entnehmen.

Die diffusiven Terme führen auf

$$\begin{aligned} g_{\nu\mu}^K &= \rho^* \left(\frac{1}{\text{Re}} \nu^* + \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{\nu_t^*}{\sigma_k} \right) \delta_{\nu\mu} \quad \text{und} \\ g_{\nu\mu}^K &= \rho^* \left(\frac{1}{\text{Re}} \nu^* + \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{\nu_t^*}{\sigma_\varepsilon} \right) \delta_{\nu\mu} \end{aligned}$$

wobei der erste Ausdruck für die diffusiven Terme der Gleichung zur Bestimmung der Turbulenzenergie und der zweite Ausdruck für die diffusiven Terme der Gleichung zur Bestimmung der turbulenten Dissipation steht. An den Oberflächen des Rechengebiets sind die auf $\rho_0 v_0 k_0$ beziehungsweise $\rho_0 v_0 \varepsilon_0$ normierten diffusiven Flüsse vorzugeben.

Eine Transformation der diffusiven Flüsse, wie sie zur lokalen Parabolisierung notwendig ist, wird durch eine entsprechende Umformung von $\underline{e}_\nu g_{\nu\mu}^K \partial \phi_j / \partial x_\mu^*$ erreicht.

Die Quellterme werden nach der Methode umgeformt und diskretisiert, die bereits bei der Simulation des wandnahen Bereichs erfolgreich angewendet wurde (siehe Abschnitt 4.2.3). Die resultierende Diskretisierung der Quellterme für die Turbulenzenergie und deren Dissipation wird damit beschrieben durch

$$\begin{aligned} h &= \rho^* (\mathcal{P}_k^* + \varepsilon^*) & g^M &= 2 \rho^* \frac{\varepsilon^*}{k^*} \quad \text{und} \\ h &= \rho^* \frac{\varepsilon^*}{k^*} (c_{\varepsilon 1} \mathcal{P}_k^* + c_{\varepsilon 2} \varepsilon^*) & g^M &= 2 c_{\varepsilon 2} \rho^* \frac{\varepsilon^*}{k^*}. \end{aligned}$$

B.2.4. Bestimmung des Temperaturfelds

Die Gleichung zur Bestimmung des Temperaturfelds ist aus der Energiebilanz abgeleitet. Daher enthalten die konvektiven Terme zusätzlich zu den in den Gleichungen (B.4) und (B.13) angegebenen Formen die spezifische Wärmekapazität. Die Diskretisierung des konvektiven Terms führt daher zu $g_\nu^{K'} = \rho^* c_p^* v_\nu^*$ und $g_\nu^{K't} = 0$, wobei kein konvektiver Anteil in den Oberflächenintegralen auftritt, und zu $g_\nu^{K'} = 0$ und $g_\nu^{K't} = -\rho^* c_p^* v_\nu^*$, wobei der konvektive Fluß, der sich in diesem Fall zu $\rho^* v_\nu^* c_p^* T^*$ ergibt, auf den Rändern des Berechnungsgebiets vorzugeben ist. Er wird, wie bei der Diskretisierung der Impulsbilanz erläutert, der Lösung des vorhergehenden Iterationsschritts entnommen.

Die in dieser Arbeit verwendeten Formulierungen der Geschwindigkeits-Temperatur-Korrelation (3.27), (3.28) und (3.29) enthalten durch $T^* = T^{*(j)} \phi_j$ implizit die Ansatzfunktionen ϕ_j . Sie lassen sich in die im folgenden verwendete allgemeine Form

$$-\widetilde{T'v_k''}^* = c_{kl} \frac{\partial T^*}{\partial x_l^*}$$

bringen. Die Diskretisierung der diffusiven Terme führt damit zu

$$g_{\nu\mu}^K = \frac{\lambda^*}{\text{Pé}} \delta_{\nu\mu} + \frac{\rho^* c_p^*}{\sqrt{\text{Re}}} c_{\nu\mu}.$$

An der Oberfläche des Rechengebiets ist die Normalenkomponente der diffusiven Wärmestromdichte

$$\dot{q}_\nu^d = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_\nu} + \rho c_p \widetilde{T'v''_\nu}$$

vorzugeben, der mit $\rho_0 c_{p,0} v_0 \Delta T_0$ zu normieren ist.

Zur lokalen Parabolisierung muß der diffusive Wärmestrom oder äquivalent dazu der Vektor $\underline{e}_\nu g_{\nu\mu}^K \partial \phi_j / \partial x_\mu^*$ gemäß der in Abschnitt 3.2 angegebenen Vorschrift transformiert werden.

Die Diskretisierung der Quellterme führt nach Gleichung (3.26) zu

$$\begin{aligned} h &= \frac{\text{Ec}}{\text{Re}} \rho^* \nu^* \frac{\partial v_l^*}{\partial x_k^*} \left(\frac{\partial v_l^*}{\partial x_k^*} + \frac{\partial v_k^*}{\partial x_l^*} - \frac{2}{3} \delta_{kl} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_m^*} \right) + \frac{\text{Ec}}{\sqrt{\text{Re}}} \rho^* \varepsilon^* + \text{Ec Eu } \beta_0 T_0 \beta^* v_k^* \frac{\partial p^*}{\partial x_k^*}, \\ g^M &= -\text{Ec Eu } \beta_0 T_0 \frac{\Delta T_0}{T_0} \beta^* v_k^* \frac{\partial p^*}{\partial x_k^*} \quad \text{und} \\ g_\nu^{K'} &= \frac{c_{k\nu}}{\sqrt{\text{Re}}} \left(\text{Ec Eu } \beta_0 T_0 \frac{\Delta T_0}{T_0} \beta^* \frac{\partial p^*}{\partial x_k^*} + \rho^* \frac{\partial c_p^*}{\partial x_k^*} \right), \end{aligned}$$

wobei die in h enthaltenen Terme der molekularen und der turbulenten Dissipation die dominanten Quellterme sind.